

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РГЗ И ИДЗ

ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕХАНИКИ

Основные формулы

КИНЕМАТИКА

Положение материальной точки в пространстве задается радиус-вектором \vec{r} :

$$\vec{r} = \vec{i}x + \vec{j}y + \vec{k}z ,$$

где \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} – единичные векторы направлений (орты); x , y , z – координатные точки.

Кинематическое уравнение движения в координатной форме:

$$x=f_1(t) ; y=f_2(t); z=f_3(t) ,$$

где t – время.

Средняя скорость

$$\langle V \rangle = \frac{\Delta r}{\Delta t} ,$$

где Δr – перемещение материальной точки за интервал времени Δt .

Средняя путевая скорость

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t} ,$$

где Δs – путь, пройденный точкой за интервал времени Δt .

Мгновенная скорость

$$\vec{V} = \frac{dr}{dt} = \vec{i}v_x + \vec{j}v_y + \vec{k}v_z ,$$

где $v_x = \frac{dx}{dt}$; $v_y = \frac{dy}{dt}$; $v_z = \frac{dz}{dt}$ – проекции скорости \vec{V} на оси координат.

Модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} .$$

Ускорение

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{i}a_x + \vec{j}a_y + \vec{k}a_z ,$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}$; $a_y = \frac{dv_y}{dt}$; $a_z = \frac{dv_z}{dt}$ – проекции ускорения \vec{a} на оси координат.

Модуль ускорения

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

При криволинейном движении ускорение можно представить как сумму нормальной \vec{a}_n и тангенциальной \vec{a}_τ составляющих (рис. 1):

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau .$$

Модули этих ускорений:

$$a_n = \frac{v^2}{R} ; a_\tau = \frac{dv}{dt} ; a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} ,$$

где R – радиус кривизны в данной точке траектории.

Кинематическое уравнение равнопеременного движения материальной точки вдоль оси x

$$x = x_0 + vt ,$$

где x_0 – начальная координата; t – время. При равномерном движении

$v = const$ и $a = 0$.

Кинематическое уравнение равнопеременного ($a = const$) движения вдоль оси x

$$x = x_0 + vt + at^2/2 ,$$

где v_0 – начальная скорость; t – время.

Скорость точки при равнопеременном движении

$$v = v_0 + at .$$

Положение твердого тела (при заданной оси вращения) определяется углом поворота (или угловым перемещением) φ

Кинематическое уравнение вращательного движения $\varphi = f(t)$.

Средняя угловая скорость

$$\langle \omega \rangle = \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} ,$$

где $\Delta \varphi$ – изменение угла поворота за интервал времени Δt .

Мгновенная угловая скорость

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Угловое ускорение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}.$$

Кинематическое уравнение равномерного вращения

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t,$$

где φ_0 – начальное угловое перемещение; t – время.

При равномерном вращении

$$\omega = \text{const} \text{ и } \varepsilon = 0.$$

Частота вращения

$$n = N/t, \text{ или } n = 1/T,$$

где N – число оборотов, совершаемых телом за время t ; T – период вращения (время одного полного оборота).

Кинематическое уравнение равнопеременного вращения ($\varepsilon = \text{const}$)

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2,$$

где ω_0 – начальная угловая скорость; t – время.

Угловая скорость тела при равнопеременном движении

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

Связь между линейными и угловыми величинами, характеризующими вращение материальной точки, выражается следующими формулами:

путь, пройденный точкой по дуге окружности радиусом R ,

$$s = \varphi R,$$

где φ – угол поворота тела;

скорость точки линейная

$$v = \omega R; \vec{V} = [\vec{\omega} \vec{R}];$$

ускорение точки

тангенциальное

$$a_\tau = \varepsilon R; \vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \vec{R}];$$

нормальное

$$a_n = \omega^2 R; \vec{a}_n = -\omega^2 \vec{R}.$$

Динамика материальной точки и тела, движущихся поступательно

Уравнение движения материальной точки (второй закон Ньютона):

в векторной форме

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \text{ или } m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i,$$

где $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i$ – геометрическая сумма сил, действующих на материальную точку; m – масса; \vec{a} – ускорение; $\vec{p} = m\vec{v}$ – импульс;

N – число сил, действующих на точку;

в векторной форме (скалярной)

$$m a_x = \sum F_{xi}, \quad m a_y = \sum F_{yi}, \quad m a_z = \sum F_{zi},$$

или

$m \frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{xi}$, $m \frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{yi}$, $m \frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{zi}$, где под знаком суммы стоят проекции сил F_i на соответствующие оси

координат.

Сила упругости

$$F_{\text{упр}} = -kx,$$

где k – коэффициент упругости (жесткость в случае пружины); x – абсолютная деформация.

Сила гравитационного взаимодействия

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где G – гравитационная постоянная; m_1 и m_2 – массы взаимодействующих тел, рассматриваемых как материальные точки; r – расстояние между ними.

Сила трения скольжения $F_{mp} = \mu N$,

где μ – коэффициент трения скольжения; N – сила нормального давления.

Координаты центра масс системы материальных точек

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{m_i}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{m_i}, \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{m_i},$$

где m_i – масса i -й материальной точки; x_i, y_i, z_i – её координаты.

Закон сохранения импульса

$$\sum_{i=1}^N \bar{p}_i = \text{const}, \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^N m_i \bar{v}_i = \text{const},$$

где N – число материальных точек (или тел), входящих в систему.

Работа, совершаемая постоянной силой

$$\Delta A = \bar{F} \Delta \bar{r}, \quad \text{или} \quad \Delta A = F \Delta r \cos \alpha,$$

где α – угол между направлением векторов силы F и перемещения Δr .

Работа, совершаемая переменной силой

$$A = \int_L F(r) \cos \alpha dr,$$

где интегрирование ведется вдоль траектории, обозначаемой L .

Средняя мощность за интервал времени Δt

$$\langle N \rangle = \frac{\Delta A}{\Delta t}.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{dA}{dt}, \quad \text{или} \quad N = Fv \cos \alpha, \quad \text{где } dA \text{ – работа, совершаемая за промежуток времени } dt.$$

Кинетическая энергия материальной точки (или тела), движущихся поступательно.

$$T = mv^2/2, \quad \text{или} \quad T = p^2/(2m).$$

Потенциальная энергия тела и сила, действующая на тело в данной точке поля, связаны соотношением

$$\bar{F} = -\text{grad} \Pi \quad \text{или} \quad \bar{F} = -\left(\bar{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right),$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ – единичные векторы (орты). В частном случае, когда поле сил обладает сферической симметрией (как, например, гравитационное),

$$F = -\frac{d\Pi}{dr}$$

Потенциальная энергия упругодеформированного тела (сжатой или растянутой пружины) $\Pi = \frac{kx^2}{2}$.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек (или тел) массами m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r друг от друга,

$$\Pi = -G \frac{m_1 m_2}{r}.$$

Потенциальная энергия тела, находящегося в однородном поле силы тяжести, $\Pi = mgh$,

где h – высота тела над уровнем, принятым за нулевой для отсчета потенциальной энергии.

Эта формула справедлива при условии $h \ll R$, где R – радиус Земли.

Закон сохранения энергии в механике выполняется в замкнутой системе, в которой действуют только консервативные силы, и записывается в виде

$$T + \Pi = \text{const}.$$

Динамика вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

Момент силы \bar{F} , действующей на тело, относительно оси вращения

$$M = F_{\perp} l,$$

где F_{\perp} – проекция силы \bar{F} на плоскость, перпендикулярную оси вращения; l – плечо силы \bar{F} (кратчайшее расстояние от оси вращения до линии действия силы).

Момент инерции относительно оси вращения:

а) материальной точки

$$J = mr^2,$$

где m – масса точки; r – расстояние ее от оси вращения;

б) дискретного твердого тела

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2,$$

где Δm_i – масса i -го элемента тела; r_i – расстояние этого элемента от оси вращения; n – число элементов тела;
в) сплошного твердого тела

$$J = \int r^2 dm.$$

Если тело однородно, т.е. его плотность ρ одинакова по всему объему, то

$$dm = \rho dV \text{ и } J = \rho \int r^2 dV,$$

где V – объем тела.

Моменты инерции некоторых тел правильной геометрической формы:

| Тело | Ось, относительно которой определяется момент инерции | Формула момента инерции |
|---|--|-------------------------|
| Однородный тонкий стержень массой m и длиной l | Проходит через центр тяжести стержня перпендикулярно стержню | $\frac{1}{12} ml^2$ |
| Тонкое кольцо, обруч, труба радиусом R и массой m | Проходит через конец стержня перпендикулярно стержню | $\frac{1}{2} ml^2$ |
| Маховик радиусом R и массой m , распределенной по ободу | Проходит через центр перпендикулярно плоскости основания | mR^2 |
| Круглый однородный диск (цилиндр) радиусом R и массой m | Проходит через центр диска перпендикулярно плоскости основания | $\frac{1}{2} mR^2$ |
| Однородный шар массой m и радиусом R | Проходит через центр шара | $\frac{2}{5} mR^2$ |

Теорема Штейнера. Момент инерции тела относительно произвольной оси

$$J = J_0 + ma^2,$$

где J – момент инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр тяжести тела параллельно заданной оси; a – расстояние между осями; m – масса тела.

Момент импульса вращающегося тела относительно оси

$$L = J\omega.$$

Закон сохранения момента импульса

$$\sum_{i=1}^n L_i = \text{const},$$

где L_i – момент импульса i -го тела, входящего в состав системы.

Закон сохранения момента импульса для двух взаимодействующих тел

$$J_1\omega_1 + J_2\omega_2 = J'_1\omega'_1 + J'_2\omega'_2,$$

где J_1, J_2, ω_1 и ω_2 – моменты инерции и угловые скорости тел до взаимодействия; J'_1, J'_2, ω'_1 и ω'_2 – те же величины после взаимодействия.

Закон сохранения момента импульса для одного тела, момент инерции которого меняется

$$J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

где J_1 и J_2 – начальный и конечный моменты инерции; ω_1 и ω_2 – начальная и конечная угловые скорости тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела относительно неподвижной оси

$$\bar{M}dt = d(J\bar{\omega}),$$

где \bar{M} – момент силы, действующей на тело в течение времени dt ; J – момент инерции тела; $\bar{\omega}$ – угловая скорость; $J\bar{\omega}$ – момент импульса.

Если момент силы и момент инерции постоянны, то это уравнение записывается в следующем виде: $\bar{M}\Delta t = J\Delta\bar{\omega}$.

В случае постоянного момента инерции основное уравнение динамики вращательного движения принимает вид

$$\bar{M} = J\bar{\epsilon},$$

где $\bar{\epsilon}$ – угловое ускорение.

Работа постоянного момента силы M , действующего на вращающееся тело

$$A = M\varphi,$$

где φ – угол поворота тела.

Мгновенная мощность, развиваемая при вращении тела

$$N = M\omega.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела

$$T = \frac{J\omega^2}{2}.$$

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

где $\frac{mv^2}{2}$ – кинетическая энергия поступательного движения тела; v – скорость центра инерции тела;

$\frac{J\omega^2}{2}$ – кинетическая энергия вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через центр инерции.

Работа, совершаемая при вращении тела, и изменение его кинетической энергии связаны соотношением

$$A = \frac{J\omega_2^2}{2} - \frac{J\omega_1^2}{2}.$$

Величины, характеризующие динамику вращательного движения, и формулы, описывающие это движение, аналогичны соответствующим величинам и формулам поступательного движения.

Эта аналогия раскрывается следующей таблицей:

| Поступательное движение | Вращательное движение |
|--|--|
| Основной закон динамики | |
| $F\Delta t = mv_2 - mv_1;$ $F = ma$ | $M\Delta t = J\omega_2 - J\omega_1;$ $M = J\varepsilon$ |
| Закон сохранения | |
| импульса $\sum_{i=1}^n m_i v_i = const$ | момента импульса $\sum_{i=1}^n J_i \omega_i = const$ |
| Работа и мощность | |
| $A = Fs;$ $N = Fv$ | $A = M\varphi;$ $N = M\omega$ |
| Кинетическая энергия | |
| $T = \frac{mv^2}{2}$ | $T = \frac{J\omega^2}{2}$ |

Механические колебания и волны.

Уравнение гармонических колебаний $x = A \cos(\omega t + \varphi),$

где x – смещение колеблющейся точки от положения равновесия; t – время; A , ω , φ – соответственно амплитуда, угловая частота, начальная фаза колебаний; $\omega t + \varphi$ – фаза колебаний в момент t .

Угловая частота колебаний

$$\omega = 2\pi\nu, \text{ и } \omega = 2\pi/T,$$

где ν и T – частота и период колебаний.

Скорость точки, совершающей гармонические колебания

$$v = \dot{x} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi).$$

Ускорение при гармонических колебаниях

$$a = \ddot{x} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi).$$

Амплитуда A результирующего колебания, полученного при сложении двух колебаний с одинаковыми частотами, происходящих по одной прямой, определяется по формуле

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где A_1 и A_2 – амплитуды составляющих колебаний; φ_1 и φ_2 – их начальные фазы.

Начальная фаза φ результирующего колебания может быть найдена из формулы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Частота биений, возникающих при сложении двух колебаний, происходящих по одной прямой с различными, но близкими по значению частотами ν_1 и ν_2 ,

$$\nu = \nu_1 - \nu_2.$$

Уравнение траектории точки, участвующих в двух взаимно перпендикулярных колебаниях с амплитудами A_1 и A_2 , и начальными фазами φ_1 и φ_2 ,

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1).$$

Если начальные фазы φ_1 и φ_2 составляющих колебаний одинаковы, то уравнение принимает вид

$$y = \frac{A_2}{A_1} x, \text{ или } y = -\frac{A_2}{A_1} x, \quad \text{т.е. точка движется по прямой.}$$

В том случае, если разность фаз $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$, уравнение принимает вид $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1,$

т.е. точка движется по эллипсу.

Дифференциальное уравнение гармонических колебаний материальной точки

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

где m – масса точки; k – коэффициент квазиупругой силы $k = m\omega^2$.

Полная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания

$$E = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}.$$

Период колебаний тела подвешенного на пружине (пружинный маятник) $T = 2\pi\sqrt{m/k}$,

где m – масса тела; k – жесткость пружины.

Формула справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука (при малой массе пружины в сравнение с массой тела).

Период колебаний математического маятника $T = 2\pi\sqrt{l/g}$,

где l – длина маятника; g – ускорение свободного падения.

Период колебаний физического маятника $T = 2\pi\sqrt{L/g} = 2\pi\sqrt{J/(mga)}$,

где J – момент инерции колеблющегося тела относительно оси колебаний;

a – расстояние центра масс маятника до оси колебаний; $L = J/(ma)$ – приведенная длина физического маятника.

Приведенные формулы являются точными для случая бесконечно малых амплитуд. При конечных амплитудах эти формулы дают лишь приближенные результаты. При амплитудах не более $\approx 3^\circ$ ошибка в значении периода не превышает 1%.

Период крутильных колебаний тела, подвешенного на упругой нити, $T = 2\pi\sqrt{J/k}$,

где J – момент инерции тела относительно оси, совпадающей с упругой нитью; k – жесткость упругой нити, равная отношению упругого момента, возникающего при закручивании нити, к углу, на котором нить закручивается.

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \text{ или } \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

где r – коэффициент сопротивления; δ – коэффициент затухания: $\delta = r/(2m)$; ω_0 – собственная угловая частота колебаний, равная $\omega = \sqrt{k/m}$.

Уравнение затухающих колебаний $x = A(t)\cos(\omega t + \varphi)$,

Где $A(t)$ – амплитуда затухающих колебаний в момент t ; ω – их угловая частота.

Угловая частота затухающих колебаний

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Зависимость амплитуды затухающих колебаний от времени $A(t) = A_0 e^{-\delta t}$,

где A_0 – амплитуда колебаний в момент $t = 0$.

Логарифмический декремент колебаний $\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T$,

где $A(t)$ и $A(t+T)$ – амплитуды двух последовательных колебаний, отстоящих по времени друг от друга на период.

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t \quad \text{или} \quad \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t,$$

где $F_0 \cos \omega t$ – внешняя периодическая сила, действующая на колеблющуюся материальную точку и вызывающая вынужденные колебания; F_0 – ее амплитудное значение; $f_0 = F_0/m$.

Амплитуда вынужденных колебаний

$$A = f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}.$$

Резонансная частота и резонансная амплитуда

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} \quad \text{и} \quad A_{рез} = f_0 / (2\delta \sqrt{\omega_0^2 + \delta^2}).$$

Уравнение плоской волны

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - x/v), \text{ или } \xi(x, t) = A \cos \omega(\omega t - kx),$$

где $\xi(x, t)$ – смещение точек среды с координатой x в момент времени t ; ω – угловая частота; v – скорость распространения колебаний в среде (фазовая скорость); k – волновое число; $k = 2\pi/\lambda$, λ – длина волны.

Длина волны связана с периодом T колебаний и частотой ν соотношением

$$\lambda = vT \quad \text{и} \quad \lambda = v/\nu.$$

Разность фаз колебаний двух точек среды, расстояние между которыми (разность хода) равно Δx ,

$$\Delta\varphi = 2\pi/\lambda \Delta x,$$

где λ – длина волны.

Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \frac{x}{v} \cos \omega t, \text{ или } \xi(x, t) = A \cos kx \cos \omega t$$

Примеры решения задач

Пример 1. Уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид $x = A + Bt + Ct^3$, где $A = 2$ м, $B = 1$ м/с, $C = -0,5$ м/с³. Найти координату x , скорость v и ускорение a точки в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Координату x найдем, подставив в уравнение движения числовые значения коэффициентов A , B и C и времени t :

$$x = (2 + 1 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2^3) \text{ м} = 0$$

Мгновенная скорость есть первая производная от координаты по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2.$$

В момент времени $t = 2$ с

$$v = (1 - 3 \cdot 0,5 \cdot 2^2) \text{ м/с} = -5 \text{ м/с}.$$

Ускорение точки найдем, взяв первую производную от скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 6Ct.$$

В момент времени $t = 2$ с

$$a = 6(-0,5) 2 \text{ м/с} = -6 \text{ м/с}^2.$$

Пример 2. Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$ где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с². Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $r = 0,1$ м от оси вращения, для момента времени $t = 4$ с.

Решение. Полное ускорение \vec{a} точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения \vec{a}_τ , направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения \vec{a}_n , направленного к центру кривизны траектории (рис. 1):

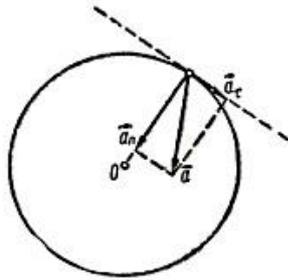


Рис. 1.

Так как векторы \vec{a}_τ и \vec{a}_n взаимно перпендикулярны, то абсолютная величина ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \quad (1)$$

Тангенциальное и нормальное ускорения точки вращающегося тела выражаются следующими формулами:

$$\vec{a}_\tau = \varepsilon r, \quad \vec{a}_n = \omega^2 r,$$

где ω — угловая скорость тела; ε — его угловое ускорение. Подставляя выражения для a_τ и a_n в формулу (1), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \quad (2)$$

Угловую скорость ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct$.

В момент времени $t = 4$ с угловая скорость $\omega = [20 + 2(-2) 4] \text{ рад/с} = 4 \text{ рад/с}$.

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2C = -4 \text{ рад/с}^2$$

Это выражение не содержит времени; следовательно, угловое ускорение заданного движения постоянно.

Подставляя найденные значения ω и ε и заданное значение r в формулу (2), получим

$$a = 0,1 \sqrt{(-4)^2 + 4^4} \text{ м/с}^2 = 1,65 \text{ м/с}^2$$

Пример 3. Артиллерийское орудие расположено на горе высотой H . Снаряд вылетает из ствола со скоростью \vec{v}_0 , направленной под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: а) дальность полета снаряда по горизонтальному направлению; б) скорость снаряда в момент падения; в) угол падения; г) уравнение траектории и д) начальный угол стрельбы, при котором дальность полета наибольшая.

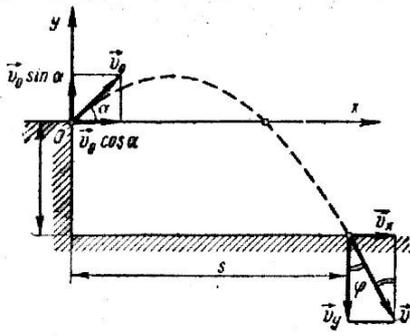


Рис.2

Решение. Делаем чертеж (рис. 2). Прямоугольную систему координат выбираем так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены вдоль поверхности Земли и по нормали к ней в сторону начального смещения снаряда. Изображаем траекторию снаряда, его начальную скорость \vec{v}_0 , угол бросания α , высоту h , горизонтальное перемещение S , скорость в момент падения \vec{v} (она направлена по касательной к траектории в точке падения) и угол падения φ (углом падения тела называют угол между касательной к траектории, проведенной в точку падения, и нормалью к поверхности Земли).

Движение тела, брошенного под углом к горизонту, можно представить как результат сложения двух прямолинейных движений: одного — вдоль поверхности Земли (оно будет равномерным, поскольку сопротивление воздуха не учитывается) и второго — перпендикулярно поверхности Земли (в данном случае это будет движение тела, брошенного вертикально вверх). Для замены сложного движения двумя простыми разложим (по правилу параллелограмма) скорости \vec{v}_0 и \vec{v} на горизонтальные и вертикальные составляющие и найдем их проекции: $v_0 \cos \alpha$ и $v_0 \sin \alpha$ — для скорости \vec{v}_0 и v_x и v_y — для скорости \vec{v} .

Составляем уравнения скорости и перемещения для их проекций по каждому направлению. Так как в горизонтальном направлении снаряд летит равномерно, то его скорость и координаты в любой момент времени удовлетворяют уравнениям

$$v_x = v_0 \cos \alpha ; \tag{1}$$

и

$$x = v_0 \cos \alpha t . \tag{2}$$

Для вертикального направления:

$$v_y = v_0 \sin \alpha - gt ; \tag{3}$$

$$y = v_0 \sin \alpha t - \frac{gt^2}{2} . \tag{4}$$

В момент времени t_1 , когда снаряд упадет на землю, его координаты равны:

$$x = S ; y = -h . \tag{5}$$

В последнем уравнении перемещение h взято со знаком «минус», так как за время движения снаряд сместится относительно уровня отсчета O высоты в сторону, противоположную направлению, принятому за положительное.

Результирующая скорость в момент падения равна:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} . \tag{6}$$

В составленной системе уравнений пять неизвестных; нам нужно определить S и v .

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g} . \tag{7}$$

Из уравнений (4) и (5) находим время полета снаряда:

$$S = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + v_0 \cos \alpha \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}{g}$$

Подставляя выражение для t_1 в формулы (2) и (3) с учетом (5), соответственно получаем

$$v_y = -\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh} \tag{8}$$

После этого из (6) с учетом (1) и (8) находим:

$$v = -\sqrt{v_0^2 + 2gh} . \tag{9}$$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы. Если $h=0$, т. е. снаряды падают на уровне вылета, то согласно формуле (7) дальность их полета будет равна $S = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Если при этом учесть, что угол бросания равен

45° ($\sin 2\alpha = 1$), то при заданной начальной скорости v_0 дальность полета наибольшая: $S_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$.

Подставив в выражение (9) значение $h = 0$, получим, что скорость снаряда в момент его подлета к уровню, с которого был произведен выстрел, равна его начальной скорости: $v = v_0$.

При отсутствии сопротивления воздуха скорость падения тел равна их начальной скорости бросания независимо от того, под каким углом было брошено тело, лишь бы точки бросания и падения находились на одном уровне. Учитывая, что горизонтальная составляющая скорости с течением времени не изменяется, легко установить, что в момент падения скорость тела образует с горизонтом такой же угол, как и в момент бросания.

Угол падения можно найти, исходя из того, что скорость тела в любой точке траектории направлена по касательной. Из рис. 2 видно, что $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_x}{v_y}$, откуда с учетом выражений (1) и (8) получим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_0 \cos \alpha}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gh}}.$$

Чтобы найти уравнение траектории движения точки — снаряда, нужно найти связь между ее координатами x и y в произвольный момент времени t . Если в уравнениях (2) и (4) под x и y подразумевать смещение снаряда по осям (учитывая, что эти уравнения справедливы для всего движения снаряда), а под t — время, по истечении которого снаряд из точки центра O попал в данную точку траектории, то, исключая из уравнений t , мы и получим искомую связь. Найдя из уравнения (2) время t и подставив его в уравнение (4), получим:

$$y = \operatorname{tg}\alpha x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2.$$

Это уравнение вида $y = -ax^2 + bx$, оно представляет собой уравнение параболы, проходящей через начало координат O и обращенной выпуклостью вверх. Таким образом, тело, брошенное под углом α к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха летит по параболе. Нетрудно заметить, что этот вывод имеет место для любых углов бросания.

Решая уравнения (2), (4) и (5) относительно начального угла бросания α , получим:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gs} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gs}{v_0^2} \right)^2} \right). \quad (10)$$

Поскольку угол бросания не может быть мнимым, то это выражение имеет физический смысл лишь при условии, что

$$1 + \frac{2gh}{v_0^2} - \left(\frac{gs}{v_0^2} \right)^2 \geq 0,$$

т.е. $s \leq \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g}$ откуда следует, что максимальное перемещение снаряда по горизонтальному направлению равно:

$$S_{\max} = \frac{v_0 \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g},$$

Подставляя выражение $S = S_{\max}$ в формулу (10), получим для угла α , при котором дальность полета наибольшая:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_0^2}{gS_{\max}} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}.$$

Пример 4. Камень брошен на склоне горы под углом α к ее поверхности (рис. 3). Определите дальность полета камня и его наибольшую высоту подъема над склоном, если начальная скорость камня равна \vec{v}_0 , угол наклона горы к горизонту β . Сопротивление воздуха не учитывать.

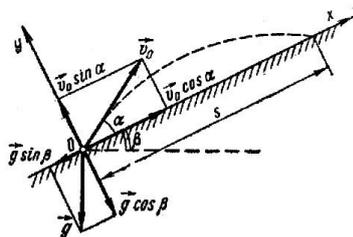


Рис.3.

Решение: Сложное движение камня по параболе нужно представить как результат наложения двух прямолинейных движений: одного вдоль поверхности Земли, другого — по нормали ней.

Выберем прямоугольную систему координат с началом отсчета в точке бросания камня так, чтобы оси OX и OY совпали с указанными направлениями, и найдем составляющие векторов начальной скорости \vec{v}_0 и ускорения свободного падения \vec{g} по осям. Проекции этих составляющих на оси OX и OY равны соответственно: $v_0 \cos \alpha; v_0 \sin \alpha; -g \sin \beta; -g \cos \beta$.

После этого сложное движение можно рассматривать как два более простых: равнозамедленное движение вдоль поверхности Земли с ускорением $g \sin \beta$ и равнопеременное движение, перпендикулярное склону горы, с ускорением $g \cos \beta$.

Составляем уравнения движения для каждого направления с учетом того, что за время t_1 всего движения перемещение камня по нормали к поверхности (по оси OY) оказалось равным нулю, а вдоль поверхности (по оси OX) — равным S :

$$0 = v_0 \sin \alpha t_1 - \frac{g \cos \beta t_1^2}{2}; \quad s = v_0 \cos \alpha t_1 - \frac{g \sin \beta t_1^2}{2}.$$

По условию задачи v_0 , α и β нам заданы, поэтому в составленных уравнениях имеется две неизвестные величины: S и t .

Из первого уравнения определяем время полета камня: $t_1 = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g \cos \alpha}$.

Подставляя это выражение во второе уравнение, находим: $s = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \beta}{g \cos \alpha}$.

Если подставить сюда значение $\beta = 0$, что соответствует случаю, когда тело брошено под углом α к горизонтальной поверхности, то получим: $s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Как и следовало ожидать, этот результат совпадает с результатом предыдущего примера.

Пример 5. Груз массой 5 кг, связанный нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, с другим грузом массой 2 кг движется вниз по наклонной плоскости. Найти натяжение нити и ускорение грузов, если коэффициент трения между первым грузом и плоскостью 0,1, угол наклона плоскости к горизонту 36° . Массами нитей и блока, а также трением в блоке пренебречь.

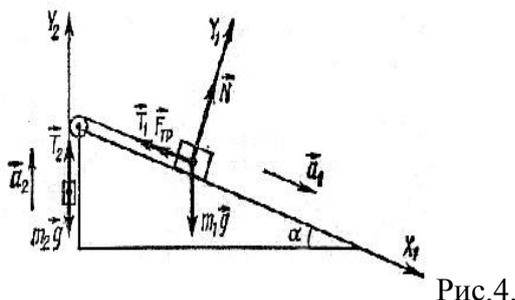


Рис.4.

Решение. Рассмотрим движение каждого груза отдельно.

На первый груз действуют: $m_1 \vec{g}$ — сила тяжести, \vec{N} — сила нормальной реакции наклонной плоскости, \vec{T}_1 — сила натяжения нити, \vec{F}_{mp} — сила трения (рис. 4). По условию задачи вектор ускорения \vec{a}_1 для первого груза направлен вниз вдоль наклонной плоскости. Запишем для первого груза уравнение второго закона Ньютона в векторной форме:

$$m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1 + \vec{F}_{mp} = m_1 \vec{a}_1.$$

Проецируя это уравнение на выбранные направления осей X_1 и Y_1 , получим:

$$m_1 g \sin \alpha - T_1 - F_{mp} = m_1 a_1; \quad (1)$$

$$m_1 g \cos \alpha + N = 0. \quad (2)$$

Из уравнения (2) находим, что $N = m_1 g \cos \alpha$, поэтому сила трения

$$F_{mp} = kN = km_1 g \cos \alpha. \quad (3)$$

Подставляя выражение (3) в уравнение (1), получим

$$m_1 g \sin \alpha - T_1 - km_1 g \cos \alpha = m_1 a_1. \quad (4)$$

На второй груз действуют: $m_2 \vec{g}$ — сила тяжести, \vec{T}_2 — сила натяжения нити. Ускорение второго груза \vec{a}_2 направлено вертикально вверх (рис. 4).

Запишем уравнение второго закона Ньютона в векторной форме для второго груза:

$$m_2 \vec{g} - \vec{T}_2 = m_2 \vec{a}_2. \quad (5)$$

Спроецировав уравнение (5) на ось Y_2 , получим

$$-m_2 g + T_2 = m_2 a_2. \quad (6)$$

Складывая почленно уравнения (4) и (6), получим

$$m_1 g \sin \alpha - T_1 - km_1 g \cos \alpha + T_2 - m_2 g = m_1 a_1 + m_2 a_2$$

откуда, учитывая, что $T_1 = T_2 = T$ и $a_1 = a_2 = a$, получим

$$a = \frac{m_1 g (\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (\sin \alpha - k \cos \alpha) - m_2}{m_1 + m_2} g;$$

$$a = \frac{5(0,59 - 0,1 \cdot 0,81) - 2}{5 + 2} \cdot 9,8 \approx 0,84 (\text{м/с}^2)$$

Силу натяжения нити T находим из уравнения (6)

$$T = m_2 g + m_2 a = m_2 (g + a); T = 2(9,8 + 0,84) \approx 21,3 (\text{Н}).$$

Пример 6. К концам невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через невесомый неподвижный блок, подвешены два груза массами по 100 г каждый. На один из грузов насажен перегрузок массой 10 г. Найти силу, с которой перегрузок давит на груз, а также силу давления на ось блока.

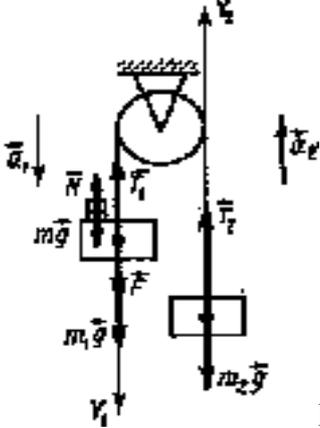


Рис.5.

Решение. Из условия невесомости и нерастяжимости нити следует, что сила натяжения нити на всех участках одинакова и все грузы движутся с одним и тем же ускорением:

$$T_1 = T_2 = T; a_1 = a_2 = a. \quad (1)$$

Рассмотрим силы, действующие на каждый груз отдельно. На первый груз действуют: $m_1 \bar{g}$ — сила тяжести, \bar{T}_1 — (1) сила натяжения нити, \bar{F} — сила давления перегрузка (рис. 5).

Проецируя векторное уравнение второго закона Ньютона для первого тела на ось Y_1 получим

$$m_1 g + F - T_1 = m_1 a_1. \quad (2)$$

На второй груз действуют: $m_2 \bar{g}$ — сила тяжести, \bar{T}_2 — сила натяжения нити.

Проецируя векторное уравнение второго закона Ньютона для второго тела на ось Y_2 , получим

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_2. \quad (3)$$

На перегрузок действуют: $m \bar{g}$ — сила тяжести, \bar{N} — сила реакции опоры.

Проецируя векторное уравнение второго закона Ньютона для перегрузка на ось Y_v получим

$$mg - N = ma_1. \quad (4)$$

Складывая почленно уравнения (2) – (4) и учитывая, что $m_1 g = m_2 g = Mg, F = N$, получим

$$Mg + N - T + T - Mg + mg - N = Ma + Ma + ma,$$

откуда

$$a = \frac{mg}{2M + m}. \quad (5)$$

Найдем силу давления перегрузка F на груз, которая по третьему закону Ньютона равна силе реакции N . Из уравнения (4) с учетом выражения (5) и условия (1) получим

$$F = N = mg - ma = \frac{2mM}{2M + m} g;$$

$$F = \frac{2 \cdot 0,01 \cdot 0,1}{2 \cdot 0,1 + 0,01} \cdot 9,8 = 9,3 \cdot 10^{-2} (\text{Н})$$

Сила давления на ось блока равна

$$F_0 = 2T. \quad (6)$$

Из уравнения (3) находим силу натяжения нити T_1

$$T = M(g + a).$$

или с учетом выражения (5)

$$T = 2Mg \frac{m + M}{2M + m}.$$

Тогда уравнение (6) примет вид

$$F_0 = 4Mg \frac{m + M}{2M + m}; F_0 = 4 \cdot 0,1 \cdot 9,8 \frac{0,01 + 0,1}{2 \cdot 0,1 + 0,01} \approx 2,1 (\text{Н}).$$

Пример 7. Пуля, летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули в 1000 раз меньше массы шара. Расстояние от точки подвеса стержня до центра шара равно 1 м. Найти скорость пули, если известно, что стержень о шаром отклонился от удара пули на угол 10° .

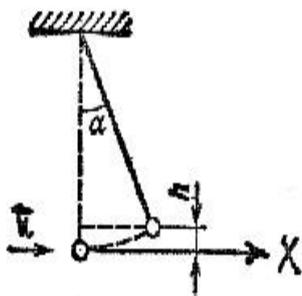


Рис. 6.

Решение. Запишем закон сохранения импульса для неупругого удара в скалярной форме относительно оси X (рис. 6):

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

откуда

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} u \quad (1)$$

Здесь m_1 и m_2 — массы пули и шара соответственно;

v_1 и v_2 — скорости пули и шара до столкновения; u — скорость шара и пули после их столкновения.

В выражении (1) кроме v_1 неизвестна еще скорость u , которую можно найти по закону сохранения энергии. Пусть в результате столкновения с пулей центр массы шара поднялся на высоту h , тогда закон сохранения энергии дает

$$\frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = (m_1 + m_2) g h,$$

откуда

$$u^2 = 2gh. \quad (2)$$

Из рисунка имеем $h = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$. Подставляя выражение для h в уравнение (2), получим

$$u^2 = 2gl(1 - \cos \alpha),$$

откуда

$$u = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}.$$

Тогда уравнение (1) можно привести к виду

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha)}$$

Используя тригонометрическое уравнение

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

преобразуем последнее выражение. Тогда

$$v_1 = 2 \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl};$$

$$v_1 = 2 \frac{m_1 + 1000 m_1}{m_1} 0,09 \cdot \sqrt{9,8 \cdot 1} \approx 570 \text{ (м/с)}$$

Пример 8. Человек, находящийся в вагонетке, толкает другую вагонетку. Обе вагонетки приходят в движение и через некоторое время останавливаются вследствие трения. Определить отношение перемещений, пройденных вагонетками до остановки, если масса первой вагонетки вместе с человеком в 3 раза больше массы второй вагонетки.

Решение. Запишем для вагонеток и человека уравнение закона сохранения импульса для упругого взаимодействия в скалярной форме относительно оси X , направление которой совпадает с направлением движения первой вагонетки:

$$0 = m_1 u_1 - m_2 u_2, \quad (1)$$

где m_1 — масса первой вагонетки вместе с человеком; m_2 — масса второй вагонетки; u_1 и u_2 — скорости первой и второй вагонеток сразу после толчка (взаимодействия).

Из уравнения (1) следует, что

$$m_1 u_1 = m_2 u_2. \quad (2)$$

Преобразуем уравнение (2), используя условие задачи:

$$3m_2 u_1 = m_2 u_2,$$

откуда

$$u_1 = \frac{u_2}{3}$$

Изменение кинетической энергии каждой вагонетки должно быть равно работе внешних сил (силы трения):

$$\Delta W = A.$$

Учитывая, что

$$\Delta W = 0 - mu^2/2$$

и

$$A = -F_{mp}S = -kmg s,$$

получим

$$-\frac{mu^2}{2} = -kmg s \quad \text{или} \quad \frac{u^2}{2} = kgs$$

Тогда для первой вагонетки соотношение (4) можно записать в виде $\frac{u_1^2}{2} = kgs_1$;

для второй вагонетки – в виде $\frac{u_2^2}{2} = kgs_2$.

Разделив почленно последние два уравнения, получим $\frac{s_1}{s_2} = \frac{u_1^2}{u_2^2}$

или, учитывая соотношение (3), $\frac{s_1}{s_2} = \frac{u_2^2}{9 \cdot u_2^2} = \frac{1}{9}$.

Пример 9. При выстреле из пружинного пистолета вертикально вверх пуля массой $m = 20$ г поднялась на высоту $h = 5$ м. Определить жесткость k пружины пистолета, если она была сжата на $s = 10$ см. Массой пружины пренебречь.

Решение. Для решения задачи воспользуемся законом сохранения энергии в механике. Но прежде проследим за энергетическими превращениями, с которыми связан выстрел.

При зарядке пистолета сжимается пружина. При этом совершается работа A_1 в результате чего пружина приобретает потенциальную энергию Π_1 . При выстреле потенциальная энергия пружины переходит в кинетическую энергию T_2 пули, а затем при подъеме ее на высоту h превращается в потенциальную энергию Π_2 пули. Если пренебречь потерями энергии в этой «цепочке» энергетических превращений, то на основании закона сохранения энергии можно записать

$$A_1 = \Pi_2. \quad (1)$$

Выразим работу A_1 . Сила F_1 , сжимающая пружину, является переменной: в каждый момент она по направлению противоположна силе упругости F и численно равна ей. Сила упругости, возникающая в пружине при ее деформации, определяется по закону Гука:

$$F = -kx,$$

где x — абсолютная деформация пружины.

Работу переменной силы вычислим как сумму элементарных работ. Элементарная работа при сжатии пружины на dx выразится формулой

$$dA_1 = F_1 dx$$

или

$$dA_1 = kx dx.$$

Интегрируя в пределах от 0 до s , получим

$$A_1 = k \int_0^s x dx = \left[\frac{1}{2} kx^2 \right]_0^s = \frac{1}{2} ks^2. \quad (2)$$

Потенциальная энергия пули на высоте h определится по формуле

$$\Pi_2 = mgh, \quad (3)$$

где g — ускорение свободного падения.

Подставив в (1) значение A_1 из (2) и Π_2 из (3), найдем

$$\frac{1}{2} ks^2 = mgh,$$

откуда

$$k = \frac{2mgh}{s^2} \quad (4)$$

Проверим, дает ли полученная формула единицу измерения жесткости k . Для этого в правую часть формулы (4) вместо величин подставим единицы их измерения:

$$k = \frac{2 \cdot \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}}{1 \text{ м}^2} = \frac{1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}}{1 \text{ м}} = 1 \text{ Н/м}$$

Убедившись, что полученная единица — 1 Н/м — является единицей измерения жесткости, можем подставить в формулу (4) числовые значения и произвести вычисления:

$$k = \frac{2 \cdot 0,02 \cdot 9,81 \cdot 5}{0,1^2} \text{ Н/м} = 196 \text{ Н/м}.$$

Пример 10. Шар массой m_1 , движущийся горизонтально с некоторой скоростью v_1 , столкнулся с неподвижным шаром массой m_2 . Шары абсолютно упругие, удар прямой, центральный. Какую долю ε своей кинетической энергии первый шар передал второму?

Решение. Доля ε энергии, переданной первым шаром второму, выразится соотношением

$$\varepsilon = \frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2 u_2^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{u_2}{v_1} \right)^2, \quad (1)$$

где T_1 — кинетическая энергия первого шара до удара; u_2 и T_2 — скорость и кинетическая энергия второго шара после удара.

Как видно из формулы (1) для определения ε надо найти u_2 . При ударе абсолютно упругих тел одновременно выполняются два закона сохранения: 1) закон сохранения импульса и 2) закон сохранения механической энергии. Пользуясь этими законами, найдем u_2 . По закону сохранения импульса, учитывая, что второй шар до удара покоился, получим

$$m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2. \quad (2)$$

По закону сохранения механической энергии

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (3)$$

Подставив это выражение u_2 в формулу (1) и сократив на v_1 и m_1 , получим $\varepsilon = \frac{m_2}{m_1} \left[\frac{2m_1 v_1}{v_1(m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$,

Из полученного соотношения видно, что доля переданной энергии зависит только от масс сталкивающихся шаров. Доля передаваемой энергии не изменится, если шары поменяются местами.

Пример 11. Через блок в виде сплошного диска, имеющего массу $m = 80$ г (рис. 7), перекинута тонкая, гибкая нить, к концам которой подвешены грузы с массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г. С каким ускорением будут двигаться грузы, если их предоставить самим себе? Трением и массой нити пренебечь.

Решение. Воспользуемся основными уравнениями динамики поступательного и вращательного движений. Для этого рассмотрим силы, действующие на каждый груз в отдельности и на блок. На первый груз действует две силы: 1) сила тяжести $\vec{m}_1 \vec{g}$, 2) сила упругости (сила натяжения нити) T_1 . Спроектируем эти силы на ось x , которую направим вертикально вниз, и напишем уравнение движения (второй закон Ньютона) в координатной форме:

$$m_1 g - T_1 = -m_1 a. \quad (1)$$

Уравнение движения для второго груза запишется аналогично:

$$m_2 g - T_2 = m_2 a. \quad (2)$$

Под действием двух моментов сил $T_1' r$ и $T_2' r$ относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа, блок приобретает угловое ускорение $\varepsilon \left(\varepsilon = \frac{a}{r} \right)$. Согласно основному уравнению динамики вращательного движения

$$T_2' r - T_1' r = J_z \varepsilon, \quad (3)$$

где $J_z = \frac{1}{2} m r^2$ — момент инерции блока (сплошного диска) относительно оси z .

Сила T_1' согласно третьему закону Ньютона по абсолютной величине равна силе T_1 . Соответственно сила T_2' по абсолютной величине равна силе T_2 . Воспользовавшись этим, подставим в уравнение (3) вместо T_1' и T_2' выражения для T_1 и T_2 , получив их предварительно из уравнений (1) и (2):

$$(m_2 g - m_2 a) r - (m_1 g + m_1 a) r = \frac{1}{2} m r^2 \frac{a}{r}.$$

После сокращения на r и перегруппировки членов найдем интересующее нас ускорение:

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{m}{2}} g. \quad (4)$$

Отношение масс в правой части формулы (4) есть величина безразмерная. Поэтому числовые значения масс m_1 , m_2 и m можно выразить в граммах, как они даны в условии задачи. Числовое значение ускорения g надо взять в единицах СИ. После подстановки получим

$$a = \frac{(200 - 100) \text{ г}}{(200 + 100 + \frac{80}{2}) \text{ г}} \cdot 9,81 \text{ м/с}^2 = 2,88 \text{ м/с}^2$$

Пример 12. Маховик в виде сплошного диска радиусом $R = 0,2$ м и массой $m = 50$ кг раскручен до частоты вращения $n = 480$ об/мин и предоставлен самому себе. Под действием сил трения маховик остановился через $t = 50$ с. Найти момент M сил трения.

Решение. Для решения задачи воспользуемся основным уравнением динамики вращательного движения в виде

$$dL_z = M_z dt,$$

где dL_z — изменение момента импульса маховика, вращающегося относительно оси z , совпадающей с геометрической осью маховика, за интервал времени dt ; M_z — момент внешних сил (в нашем случае момент сил трения), действующих на маховик относительно той же оси.

Момент сил трения можно считать не изменяющимся с течением времени ($M_z = \text{const}$), поэтому интегрирование уравнения (1) приводит к выражению

$$\Delta L_z = M_z \Delta t. \quad (2)$$

При вращении твердого тела относительно неподвижной оси изменение момента импульса

$$\Delta L_z = J_z \Delta \omega, \quad (3)$$

где J_z — момент инерции маховика относительно оси z ; $\Delta \omega$ — изменение угловой скорости маховика.

Приравняв правые части равенств (2) и (3), получим

$$M_z \Delta t = J_z \Delta \omega,$$

откуда

$$M_z = \frac{J_z \Delta \omega}{\Delta t}. \quad (4)$$

Момент инерции маховика в виде сплошного диска определяется по формуле

$$J_z = \frac{1}{2} m R^2.$$

Изменение угловой скорости $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ выразим через конечную n_2 и начальную n_1 частоты вращения, пользуясь соотношением $\omega = 2\pi n$:

$$\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1 = 2\pi n_2 - 2\pi n_1 = 2\pi(n_2 - n_1).$$

Подставив в формулу (4) найденные выражения J_z и $\Delta \omega$, получим:

$$M_z = \frac{\pi m R^2 (n_2 - n_1)}{\Delta t}. \quad (5)$$

Подставим величины, входящие в формулу (5), в СИ и произведем вычисления:

$$M_z = \frac{3,14 \cdot 50 \cdot (0,2)^2 (0 - 8)}{50} \text{ Н} \cdot \text{м} = -1 \text{ Н} \cdot \text{м}$$

Знак минус показывает, что силы трения оказывают на маховик тормозящее действие.

Пример 13. Платформа в виде сплошного диска радиусом $R = 1,5$ м и массой $m_1 = 180$ кг вращается по инерции около вертикальной оси с частотой $n = 10$ об/мин. В центре платформы стоит человек массой $m_2 = 60$ кг. Какую линейную скорость относительно пола помещения будет иметь человек, если он перейдет на край платформы?

Решение. Платформа вращается по инерции. Следовательно, момент внешних сил относительно оси вращения z , совпадающей с геометрической осью платформы, равен нулю. При этом условии момент импульса L_z системы платформа — человек остается постоянным:

$$L_z = J_z \omega = \text{const} \quad (1)$$

где J_z — момент инерции платформы с человеком относительно оси z ; ω — угловая скорость платформы.

Момент инерции системы равен сумме моментов инерции тел, входящих в состав системы, поэтому $J_z = J_1 + J_2$, где J_1 — момент инерции платформы; J_2 — момент инерции человека.

С учетом этого равенство (1) примет вид

$$(J_1 + J_2)\omega = \text{const},$$

или

$$(J_1 + J_2)\omega = (J_1' + J_2')\omega', \quad (2)$$

где нештрихованные значения величин относятся к начальному состоянию системы, штрихованные — к конечному состоянию.

Момент инерции платформы (сплошного диска) относительно оси z при переходе человека не изменяется:

$$J_1 = J_1' = \frac{1}{2} m_1 R^2.$$

Момент инерции человека относительно той же оси будет изменяться. Если рассматривать человека как материальную точку, то его момент инерции J_2 в начальном положении (в центре платформы) можно считать равным нулю. В конечном положении (на краю платформы) момент инерции человека

$$J_2' = m_2 R^2.$$

Подставим в формулу (2) найденные выражения моментов инерции, а также выразим начальную угловую скорость ω вращения платформы с человеком через частоту вращения n ($\omega = 2\pi n$) и конечную угловую скорость ω' через линейную скорость v человека относительно пола ($\omega' = \frac{v}{R}$)

$$\left(\frac{1}{2}m_1R^2 + 0\right)2\pi n = \left(\frac{1}{2}m_1R^2 + m_2R^2\right)\frac{v}{R}.$$

После сокращения на R^2 и простых преобразований находим интересующую нас скорость:

$$v = 2\pi nR \frac{m_1}{m_1 + 2m_2}.$$

Подставим числовые значения физических величин в СИ и произведем вычисления:

$$v = 2 \cdot 3,14 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1,5 \cdot \frac{180}{180 + 2 \cdot 60} \text{ м/с} = 1 \text{ м/с}$$

Пример 14. Ракета установлена на поверхности Земли для запуска в вертикальном направлении. При какой минимальной скорости v_1 , сообщенной ракете при запуске, она удалится от поверхности на расстояние, равное радиусу Земли ($R = 6,37 \cdot 10^6$ м)? Всеми силами, кроме силы гравитационного взаимодействия ракеты и Земли, пренебречь.

Решение. Минимальную скорость v_1 ракеты можно определить, зная ее минимальную кинетическую энергию T_1 . Для определения T_1 воспользуемся законом сохранения механической энергии. Этот закон выполняется для замкнутой системы тел, в которой действуют только консервативные силы.

Систему ракета — Земля можно считать замкнутой, так как единственная сила, действующая на систему, — гравитационная, относится к разряду консервативных.

В качестве системы отсчета выберем инерциальную систему отсчета, так как только в таковой системе справедливы законы динамики и в частности законы сохранения. Известно, что система отсчета, связанная с центром масс замкнутой системы тел, является инерциальной. В рассматриваемом случае центр масс системы ракета — Земля будет практически совпадать с центром Земли, так как масса Земли M много больше массы ракеты m . Следовательно, систему отсчета, связанную с центром Земли, можно считать практически инерциальной. Согласно закону сохранения механической энергии можно написать

$$T_1 + \Pi_1 = T_2 + \Pi_2, \quad (1)$$

где T_1 и Π_1 — кинетическая и потенциальная энергии системы ракета — Земля в начальном состоянии (на поверхности Земли); T_2 и Π_2 — те же величины в конечном состоянии (на расстоянии, равном радиусу Земли).

В выбранной системе отсчета кинетическая энергия Земли равна 0. Поэтому T_1 есть просто начальная кинетическая энергия ракеты:

$$T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Потенциальная энергия системы в начальном состоянии

$$\Pi_1 = -\gamma \frac{mM}{R}.$$

По мере удаления ракеты от поверхности Земли ее потенциальная энергия будет возрастать, а кинетическая — убывать. В конечном состоянии кинетическая энергия T_2 станет равной 0, а потенциальная энергия Π_2 достигнет максимального значения:

$$\Pi_2 = -\gamma \frac{mM}{2R}.$$

Подставляя значения T_1 , Π_1 , T_2 и Π_2 в выражение (1), получим

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \gamma \frac{mM}{R} = -\gamma \frac{mM}{2R},$$

откуда после сокращения на m найдем:

$$v_1 = \sqrt{\gamma \frac{m}{R}}.$$

Заметив, что $\gamma \frac{M}{R^2} = g$ (g — ускорение свободного падения у поверхности Земли), перепишем эту формулу в следующем виде:

$$v_1 = \sqrt{gR},$$

что совпадает с выражением для первой космической скорости. Подставим числовые значения и произведем вычисления:

$$v_1 = \sqrt{9,8 \cdot 6,37 \cdot 10^6} \text{ м/с} = 7,9 \cdot 10^3 \text{ м/с}$$

Пример 15. Точка совершает гармонические колебания с частотой $\nu = 10$ Гц. В момент, принятый за начальный, точка имела максимальное смещение $x_{\text{max}} = 1$ мм. Написать уравнение колебаний точки и начертить их график.

Решение. Уравнение колебаний точки можно записать в виде

$$x = A \sin(\omega t + \varphi_1) \quad (1)$$

или

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (2)$$

где A — амплитуда колебаний; ω — циклическая частота; t — время; φ_1 и φ_2 — начальные фазы, соответствующие форме записи (1) или (2).

По определению амплитуда колебаний

$$A = x_{\max}. \quad (3)$$

Циклическая частота ω связана с частотой ν соотношением

$$\omega = 2\pi\nu. \quad (4)$$

Начальная фаза колебаний зависит от формы записи. Если использовать форму (1), то начальную фазу можно определить из условия: в момент времени $t = 0$

$$x_{\max} = A \sin \varphi_1,$$

откуда

$$\varphi_1 = \arcsin \frac{x_{\max}}{A} = \arcsin 1$$

или

$$\varphi_1 = (2k + 1) \frac{\pi}{2} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Изменение фазы на 2π не изменяет состояние колебательного движения, поэтому можно принять $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$.

В случае второй формы записи получаем: $\varphi_2 = \arccos \frac{x_{\max}}{A} = \arccos 1$

Или $\varphi_2 = 2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)

По тем же соображениям, что и в первом случае, находим $\varphi_2 = 0$.

С учетом равенств (3) – (6) уравнение колебаний примет вид:

$$x = x_{\max} \sin\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{2}\right); \quad \text{и} \quad x = x_{\max} \cos 2\pi\nu t,$$

где $x_{\max} = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м}$; $\nu = 10 \text{ Гц}$.

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

Основные формулы

Уравнение состояния идеальных газов (уравнение Клапейрона-Менделеева)

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \text{или} \quad pV = \nu RT,$$

где m — масса газа; M — его молярная масса; R — молярная газовая постоянная; T — термодинамическая температура; ν — количество вещества.

Закон Дальтона $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$,

где p — давление смеси газов; p_i — парциальное давление i -го компонента смеси; k — число компонентов смеси.

Концентрация частиц (молекул, атомов и т.п.) однородной системы

$$n = N/V, \quad \text{где } V \text{ — объем системы.}$$

Основное уравнение кинетической теории газов $p = \frac{2}{3} n \langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle$,

где p — давление газа; $\langle \varepsilon_{\text{п}} \rangle$ — средняя кинетическая энергия поступательного движения молекулы.

Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на одну степень свободы молекулы

$$\langle \varepsilon_1 \rangle = \frac{1}{2} kT;$$

приходящаяся на все степени свободы молекулы (полная энергия молекулы)

$$\varepsilon = \frac{i}{2} kT;$$

поступательного движения молекулы

$$\varepsilon = \frac{3}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; i — число степеней свободы молекулы; вращательного движения молекулы

$$\varepsilon = \frac{i-3}{2} kT.$$

Зависимость давления газа от концентрации молекул и температуры

$$p = nkT.$$

Скорость молекул:

средняя квадратичная

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3kT/m_1}, \quad \text{или} \quad \langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{3RT/M};$$

средняя арифметическая

$$\langle v \rangle = \sqrt{8kT/\langle m_1 \rangle}, \text{ или } \langle v \rangle = \sqrt{8RT/\langle M \rangle};$$

наиболее вероятная

$$\langle v_B \rangle = \sqrt{2kT/m_1}, \text{ или } \langle v_B \rangle = \sqrt{2RT/M},$$

где m_1 – масса одной молекулы.

Среднее число соударений, испытываемых одной молекулой газа в единицу времени,

$$\langle z_1 \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle,$$

где d – эффективный диаметр молекулы; n – концентрация молекул; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость молекул.

Средняя длина свободного пробега молекул газа

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Импульс (количество движения), переносимый молекулами из одного слоя газа в другой через элемент поверхности

$$dp = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S dt,$$

где η – динамическая вязкость газа; $\frac{dv}{dz}$ – градиент (поперечный) скорости течения его слоев; ΔS – площадь элемента поверхности; dt – время переноса.

Динамическая вязкость $\eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle$,

где ρ – плотность газа (жидкости); $\langle v \rangle$ – средняя скорость хаотического движения его молекул; $\langle l \rangle$ – их средняя длина свободного пробега.

Закон Ньютона

$$F = \frac{dp}{dt} = \eta \frac{dv}{dz} \Delta S,$$

где F – сила внутреннего трения между движущимися слоями газа.

Закон Фурье

$$\Delta Q = -\lambda \frac{dT}{dx} S \Delta t,$$

где ΔQ – теплота, прошедшая посредством теплопроводности через сечение площадью S за время Δt ; λ – теплопроводность; $\frac{dT}{dx}$ – градиент температуры.

Теплопроводность (коэффициент теплопроводности) газа

$$\lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle, \text{ или } \lambda = \frac{1}{6} k n \langle v \rangle \langle l \rangle,$$

где c_V – удельная теплоемкость газа при постоянном объеме; ρ – плотность газа; $\langle v \rangle$ – средняя арифметическая скорость его молекул; $\langle l \rangle$ – средняя длина свободного пробега молекул.

Закон Фика

$$\Delta m = -D \frac{dn}{dx} m_1 S \Delta t,$$

где Δm – масса газа, перенесенная в результате диффузии на поверхность площадью S за время Δt ;

D – диффузия (коэффициент диффузии); $\frac{dn}{dx}$ – градиент концентрации молекул; m_1 – масса одной молекулы.

Диффузия (коэффициент диффузии)

$$D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM, \quad \text{где } M \text{ – молярная масса газа.}$$

Молярные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$C_V = iR/2; \quad C_P = (i+2)R/2,$$

где i – число степеней свободы; R – молярная газовая постоянная.

Удельные теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении соответственно равны

$$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{M}, \quad c_P = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}.$$

Уравнение Майера $C_P - C_V = R$.

Показатель адиабаты

$$\gamma = \frac{c_P}{c_V}, \text{ или } \gamma = \frac{C_P}{C_V}, \text{ или } \gamma = \frac{i+2}{2}.$$

Внутренняя энергия идеального газа

$$U = N \langle \epsilon \rangle, \text{ или } U = \nu C_V T,$$

где $\langle \epsilon \rangle$ – средняя кинетическая энергия молекулы; N – число молекул газа; ν – количество вещества.

Работа, связанная с изменением объема газа, в общем случае вычисляется по формуле

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV,$$

где V_1 – начальный объем газа; V_2 – его конечный объем.

Работа газа:

а) при изобарном процессе $p = \text{const}$

$$A = p(V_2 - V_1);$$

б) при изотермическом процессе $pV = \text{const}$

$$A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

в) при адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2), \text{ или } A = \frac{RT_1}{\gamma - 1} \frac{m}{M} \left[1 - \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma - 1} \right], \text{ где } T_1 \text{ – начальная температура газа; } T_2 \text{ – его конечная температура.}$$

Уравнение Пуассона (уравнение газового состояния при адиабатном процессе)

$$pV^\gamma = \text{const}.$$

Связь между начальным и конечным значениями параметров состояний газа при адиабатном процессе:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma - 1}; \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}}.$$

Первое начало термодинамики в общем случае записывается в виде

$$Q = \Delta U + A,$$

где Q – количество теплоты, сообщенное газу; ΔU – изменение его внутренней энергии; A – работа, совершаемая газом против внешних сил.

Первое начало термодинамики

а) при изобарном процессе

$$Q = \Delta U + A = \frac{m}{M} C_V \Delta T + \frac{m}{M} R \Delta T = \frac{m}{M} C_p \Delta T;$$

б) при изохорном процессе

$$Q = \Delta U = \frac{m}{M} C_V \Delta T;$$

в) при изотермическом процессе

$$Q = A = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$$

г) при адиабатном процессе

$$A = -\Delta U = -\frac{m}{M} C_V \Delta T.$$

Термический коэффициент полезного действия (КПД) цикла в общем случае

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где Q_1 – количество теплоты, полученное рабочим телом (газом) от нагревателя; Q_2 – количество теплоты, переданное рабочим телом охладителю.

КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}, \text{ или } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 – температура нагревателя; T_2 – температура охладителя.

Изменение энтропии

$$\Delta S = \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

где A и B – пределы интегрирования, соответствующие начальному и конечному состояниям системы. Так как процесс равновесный, то интегрирование проводится по любому пути.

Формула Больцмана

$$S = k \ln W,$$

где S – энтропия системы; W – термодинамическая вероятность ее состояния; k – постоянная Больцмана.

Примеры решения задач

Пример 1. Определить число N молекул, содержащихся в объеме $V = 1 \text{ мм}^3$ воды, и массу m_1 молекулы воды. Считая условно, что молекулы воды имеют вид шариков, соприкасающихся друг с другом, найти диаметр d молекул.

Решение. Число N молекул, содержащихся в теле некоторой массы m , равно произведению числа Авогадро N_A на число ν киломолей вещества: $N = \nu N_A$,

так как число киломолей $\nu = \frac{m}{\mu}$, где μ — масса одного киломоля, то $N = \frac{m}{\mu} N_A$. (1)

Выразив в этой формуле массу как произведение плотности на объем V , получим

$$N = \frac{\rho V}{\mu} N_A.$$

Подставим в формулу (1) следующие числовые величины:

$\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$; $V = 1 \text{ мм}^3 = 10^{-9} \text{ м}^3$; $\mu = 18 \text{ кг/кмоль}$; $N_A = 6,02 \cdot 10^{26} \text{ кмоль}^{-1}$ и произведем вычисления

$$N = \frac{10^3 \cdot 10^{-9}}{18} \cdot 6,02 \cdot 10^{26} \text{ молекул} = 3,34 \cdot 10^{19} \text{ молекул}$$

Массу m_1 одной молекулы можно найти делением массы одного киломоля на число Авогадро:

$$m_1 = \frac{\mu}{N_A}.$$

Подставив сюда числовые значения μ и N_A , найдем массу молекулы воды: $m_1 = \frac{18}{6,02 \cdot 10^{26}} \text{ кг} = 2,99 \cdot 10^{-26} \text{ кг}$.

Если молекулы воды плотно прилегают друг к другу, то можно считать, что на каждую молекулу приходится объем (кубическая ячейка) $V_1 = d^3$, где d — диаметр молекулы. Отсюда

$$d = \sqrt[3]{V_1}. \quad (2)$$

Объем V_1 найдем, разделив объем V_0 одного киломоля вещества на число молекул в киломоле, т. е. на число Авогадро N_A :

$$V_1 = \frac{V_0}{N_A}.$$

Подставим полученное выражение V_1 в формулу (2):

$$d = \sqrt[3]{\frac{V_0}{N_A}}.$$

Входящий в эту формулу объем одного киломоля определяется выражением $V_0 = \frac{\mu}{\rho}$.

Тогда искомый диаметр молекулы

$$d = \sqrt[3]{\frac{\mu}{\rho N_A}}.$$

Подставим числовые значения физических величин в формулу (3) и произведем вычисления:

$$d = \sqrt[3]{\frac{18}{10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{26}}} \text{ м} = 3,11 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 311 \text{ пм}$$

Пример 2. В баллоне объемом $V = 10 \text{ л}$ находится гелий под давлением $p_1 = 1 \text{ МПа}$ и при температуре $T_1 = 300 \text{ К}$. После того как из баллона было взято $m = 10 \text{ г}$ гелия, температура в баллоне понизилась до $T_2 = 290 \text{ К}$. Определить давление p_2 гелия, оставшегося в баллоне.

Решение. Для решения задачи воспользуемся уравнением Менделеева — Клапейрона, применив его к конечному состоянию газа

$$p_2 V = \frac{m_2}{\mu} R T_2, \quad (1)$$

где m_2 — масса гелия в баллоне в конечном состоянии; μ — масса одного киломоля гелия; R — универсальная газовая постоянная.

Из уравнения (1) выразим искомое давление p_2

$$p_2 = \frac{m_2}{\mu} \frac{R T_2}{V}. \quad (2)$$

Массу гелия m_2 выразим через массу m_1 соответствующую начальному состоянию, и массу m гелия, взятого из баллона:

$$m_2 = m_1 - m. \quad (3)$$

Массу гелия m_1 найдем также из уравнения Менделеева — Клапейрона, применив его к начальному состоянию:

$$m_1 = \frac{\mu p_1 V}{RT_1}. \quad (4)$$

Подставляя в выражение (3) массу m_1 по формуле (4), а затем полученное выражение m_2 в формулу(2), найдем

$$p_2 = \left(\frac{\mu p_1 V}{RT_1} - m \right) \frac{RT_2}{\mu V}$$

или после преобразования и сокращения

$$p_2 = \frac{T_2}{T_1} p_1 - \frac{m RT_2}{\mu V}. \quad (5)$$

Произведем вычисления;

$$p_1 = 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}; m = 10 \text{ г} = 10^{-2} \text{ кг}; \mu = 4 \text{ кг/кмоль};$$

$$R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}; T_1 = 300 \text{ К}; T_2 = 290 \text{ К};$$

$$V = 10 \text{ л} = 10^{-2} \text{ м}^3$$

$$p_2 = \left(\frac{290}{300} \cdot 10^6 - \frac{10^{-2}}{4} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3}{10^{-2}} \cdot 290 \right) \text{ Па} = 3,64 \cdot 10^5 \text{ Па} = 0,364 \text{ МПа}$$

Пример 3. Баллон содержит $m_1 = 80$ г кислорода и $m_2 = 320$ г аргона. Давление смеси $p = 1$ МПа, температура $T = 300$ К. Принимая данные газы за идеальные, определить емкость V баллона.

Решение. По закону Дальтона давление смеси равно сумме парциальных давлений газов, входящих в состав смеси. Парциальным давлением газа называется давление, которое производил бы этот газ, если бы только он один находился в сосуде, занятом смесью.

По уравнению Менделеева — Клапейрона, парциальные давления кислорода p_1 и аргона p_2 выражаются формулами:

$$p_1 = \frac{m_1 RT}{\mu_1 V} \text{ и } p_2 = \frac{m_2 RT}{\mu_2 V}.$$

Следовательно, по закону Дальтона, давление смеси газов

$$p = p_1 + p_2, \text{ или } p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \frac{RT}{V},$$

откуда емкость баллона

$$V = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2} \right) \frac{RT}{p}. \quad (1)$$

Выразим в единицах СИ числовые значения величин, входящих в эту формулу: $m_1 = 80 \text{ г} = 0,08 \text{ кг}$; $\mu_1 = 32 \text{ кг/кмоль}$; $m_2 = 320 \text{ г} = 0,32 \text{ кг}$; $\mu_2 = 40 \text{ кг/кмоль}$; $p = 1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па}$; $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кмоль} \cdot \text{К)}$.

Подставим числовые значения в формулу (1) и произведем вычисления:

$$V = \left(\frac{0,08}{32} + \frac{0,32}{40} \right) \cdot \left(\frac{8,31 \cdot 10^3 \cdot 300}{10^6} \right) \text{ м}^3 = 0,0262 \text{ м}^3 = 26,2 \text{ л}$$

Пример 4. Найти среднюю кинетическую энергию $\langle \omega_{\text{вращ}} \rangle$ вращательного движения одной молекулы кислорода при температуре $T = 350$ К, а также кинетическую энергию W вращательного движения всех молекул, содержащихся в $m = 4$ г кислорода.

Решение. Известно, что на каждую степень свободы молекулы газа приходится одинаковая средняя энергия, выражаемая формулой

$$\langle \omega_{\text{вращ}} \rangle = \frac{3}{2} kT,$$

где k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура газа.

Так как вращательному движению двухатомной молекулы (молекула кислорода — двухатомная) приписываются две степени свободы, то средняя энергия вращательного движения молекулы кислорода выразится формулой

$$\langle \omega_{\text{вращ}} \rangle = 2 \cdot \frac{1}{2} kT \quad (1)$$

Подставив в формулу (1) значения $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$ и $T = 350 \text{ К}$, получим $\langle \omega_{\text{вращ}} \rangle = 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 350 \text{ Дж} = 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж}$

Кинетическая энергия вращательного движения всех N молекул газа определяется равенством

$$W = \langle \omega_{\text{вращ}} \rangle N. \quad (2)$$

Число всех молекул газа можно вычислить по формуле

$$N = N_A \nu, \quad (3)$$

где N_A — число Авогадро; ν — число киломолей газа.

Если учесть, что число киломолей $\nu = \frac{m}{\mu}$,

где m — масса газа; μ — масса одного киломоля газа, то формула (3) примет вид $N = N_A \frac{m}{\mu}$.

Подставив это выражение для N в формулу (2), получим $W = N_A \frac{m}{\mu} < \omega_{\text{вращ}} >$ (4)

Выразим величины, входящие в эту формулу, в единицах СИ:
 $N_A = 6,02 \cdot 10^{26}$ кмоль $^{-1}$; $m = 4 \text{ г} = 4 \cdot 10^{-3}$ кг; $\mu = 32$ кг/моль; $< \omega_{\text{вращ}} > = 4,83 \cdot 10^{-21}$ Дж.

Подставив эти значения в формулу (4), найдем

$$W = 6,02 \cdot 10^{26} \cdot \frac{4 \cdot 10^{-3}}{32} \cdot 4,83 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 364 \text{ Дж}$$

Пример 5. Вычислить удельные теплоемкости при постоянном объеме c_V и при постоянном давлении c_p неона и водорода, принимая эти газы за идеальные.

Решение. Удельные теплоемкости идеальных газов выражаются следующими формулами:

$$C_V = \frac{i}{2} \cdot \frac{R}{\mu}; \quad (1)$$

$$C_p = \frac{i+2}{2} \cdot \frac{R}{\mu}, \quad (2)$$

где i — число степеней свободы молекулы газа; μ — масса одного киломоля.

Для неона (одноатомный газ) $i = 3$ и $\mu = 20$ кг/кмоль. Вычисляя по формулам (1) и (2), получим:

$$C_V = \frac{3}{2} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3}{20} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 6,24 \cdot 10^2 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}; \quad C_p = \frac{3+2}{2} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3}{20} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,04 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$$

Для водорода (двухатомный газ) $i = 5$ и $\mu = 2$ кг/кмоль. Вычисляя по тем же формулам, получим:

$$C_V = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3}{2} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,04 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$$
$$C_p = \frac{5+2}{2} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3}{2} \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} = 1,46 \cdot 10^4 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$$

Пример 6. Вычислить удельные теплоемкости C_V и C_p смеси неона и водорода, если масса m_1 неона составляет $g_1 = 80\%$ массы смеси, масса m_2 водорода $g_2 = 20\%$. Значения удельных теплоемкостей газов взять из предыдущего примера.

Решение. Удельную теплоемкость смеси при постоянном объеме C_V найдем путем следующих рассуждений.

Теплоту, необходимую для нагревания смеси на ΔT , выразим двумя способами:

$$Q = C_V (m_1 + m_2) \Delta T, \quad (1)$$

$$Q = (C_{V,1} m_1 + C_{V,2} m_2) \Delta T, \quad (2)$$

где $C_{V,1}$ — удельная теплоемкость неона; $C_{V,2}$ — удельная теплоемкость водорода.

Приравняв правые части (1) и (2) и разделив обе части полученного равенства на ΔT , получим

$$C_V (m_1 + m_2) = C_{V,1} m_1 + C_{V,2} m_2,$$

откуда

$$C_V = C_{V,1} \frac{m_1}{m_1 + m_2} + C_{V,2} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

отношение $g_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$ и $g_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$ показывают, какую долю

массы смеси составляет масса первого газа (неона) и второго газа (водорода). После подстановки g_1 и g_2 в (3) получим

$$C_V = C_{V,1} g_1 + C_{V,2} g_2. \quad (4)$$

Подставив в формулу (4) числовые значения величин, найдем

$$C_V = (6,24 \cdot 10^2 \cdot 0,8 + 1,04 \cdot 10^3 \cdot 0,2) \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)} =$$
$$= 2,58 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Рассуждая таким образом, получим формулу для вычисления удельной теплоемкости смеси

$$\text{при постоянном давлении:} \quad C_p = C_{p,1} g_1 + C_{p,2} g_2. \quad (5)$$

Подставим в формулу (5) числовые значения:

$$C_p = (1,04 \cdot 10^3 \cdot 0,8 + 1,46 \cdot 10^4 \cdot 0,2) \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К}) = 3,75 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$$

Пример 7. Кислород массой $m = 2 \text{ кг}$ занимает объем $V_1 = 1 \text{ м}^3$ и находится под давлением $p = 0,2 \text{ МПа}$. Газ был нагрет сначала при постоянном давлении до объема $V_2 = 3 \text{ м}^3$, а затем при постоянном объеме до давления $p_3 = 0,5 \text{ МПа}$. Найти изменение ΔU внутренней энергии газа, совершенную им работу A и теплоту Q , переданную газу. Построить график процесса.

Решение. Изменение внутренней энергии газа выражается формулой

$$\Delta U = C_V m \Delta T = \frac{i}{2} \frac{R}{\mu} m \Delta T, \quad (1)$$

где i — число степеней свободы молекул газа (для двухатомных молекул кислорода $i = 5$); μ — масса одного киломоля.

Начальную и конечную температуру газа найдем, используя уравнение Клапейрона — Менделеева:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT. \quad (2)$$

Решая его относительно T , получим

$$T = \frac{pV\mu}{mR}. \quad (3)$$

Выпишем заданные величины в единицах СИ: $m = 2 \text{ кг}$; $\mu = 32 \text{ кг/моль}$; $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кмоль} \cdot \text{К})$; $V_1 = 1 \text{ м}^3$; $V_2 = V_3 = 3 \text{ м}^3$; $p_1 = p_2 = 0,2 \text{ МПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$; $p_3 = 0,5 \text{ МПа} = 5 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

Подставляя эти значения в выражение (3) и выполняя арифметические действия, получим:

$$T_1 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 1 \cdot 32}{2 \cdot 8,31 \cdot 10^3} \text{ К} = 385 \text{ К}; \quad T_2 = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32}{2 \cdot 8,31 \cdot 10^3} \text{ К} = 1155 \text{ К};$$

$$T_3 = \frac{5 \cdot 10^5 \cdot 3 \cdot 32}{2 \cdot 8,31 \cdot 10^3} \text{ К} = 2887 \text{ К}.$$

Подставляя в выражение (1) числовые значения входящих в него величин и выполняя арифметические действия, находим

$$\Delta U = \frac{5}{2} \cdot \frac{8,31 \cdot 10^3}{32} \cdot 2(2887 - 385) \text{ Дж} = 3,24 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Работа расширения газа при постоянном давлении выражается формулой

$$A = R \frac{m}{\mu} \Delta T.$$

Подставив числовые значения, получим

$$A = 8,31 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{32} \cdot (1155 - 385) \text{ Дж} = 0,400 \cdot 10^6 \text{ Дж}.$$

Работа газа, нагреваемого при постоянном объеме, равна нулю, т. е. $A_2 = 0$. Следовательно, полная работа, совершенная газом, равна

$$A = A_1 + A_2 = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Дж}$$

Согласно первому началу термодинамики теплота Q , переданная газу, равна сумме изменения внутренней энергии ΔU и работы A

$$Q = \Delta U + A,$$

следовательно,

$$Q = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Дж} + 3,24 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3,64 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 3,64 \text{ МДж}.$$

График процесса приведен на рис.

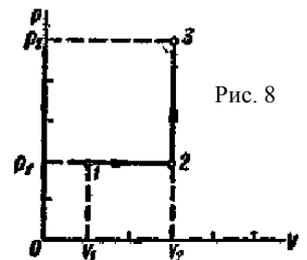


Рис. 8

Пример 8. В цилиндре под поршнем находится водород массой $m = 0,02 \text{ кг}$ при температуре $T = 300 \text{ К}$. Водород сначала расширился адиабатически, увеличив свой объем в $n_1 = 5$ раз, а затем был сжат изотермически, причем объем газа уменьшился в $n_2 = 5$ раз. Найти температуру в конце адиабатического расширения и работу, совершенную газом при этих процессах. Изобразить процесс графически.

Решение. Температуры и объемы газа, совершающего адиабатический процесс, связаны между собой соотношением

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}, \quad \text{или} \quad \frac{T_2}{T_1} = \frac{1}{n_1^{\gamma-1}},$$

где γ — отношение теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме (для водорода как двухатомного газа

$$\gamma = 1,4); \quad n_1 = \frac{V_1}{V_2} = 5.$$

Отсюда получаем следующее выражение для конечной температуры T_2 :

$$T_2 = \frac{T_1}{n_1^{\gamma-1}}.$$

Подставляя числовые значения заданных величин, находим

$$T_2 = \frac{300}{5^{1,4-1}} \text{ К} = \frac{300}{5^{0,4}}.$$

Так как $5^{0,4} = 1,91$ (находится логарифмированием), то $T_2 = \frac{300}{1,91} \text{ К} = 157 \text{ К}$

Работа A газа при адиабатическом расширении может быть определена по формуле

$$A = \frac{m}{\mu} C_V (T_1 - T_2) = \frac{m}{\mu} \frac{i}{2} R (T_1 - T_2), \quad \text{где } C_V \text{ — киломолярная теплоемкость газа при постоянном объеме.}$$

Подставив числовые значения величин: $R = 8,31 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$; $i = 5$ (для водорода как двухатомного газа); $\mu = 2 \text{ кг/кмоль}$; $m = 0,02 \text{ кг}$; $T_1 = 300 \text{ К}$; $T_2 = 157 \text{ К}$ в правую часть последней формулы и выполняя арифметические действия, получим

$$A_1 = \frac{0,02 \cdot 5 \cdot 8,31 \cdot 10^3}{2 \cdot 2} (300 - 157) \text{ Дж} = 2,98 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Работа A_2 газа при изотермическом процессе может быть выражена в виде

$$A_1 = \frac{m}{\mu} C_V R T_2 \ln \frac{V_3}{V_2}, \text{ или } A_2 = \frac{m}{\mu} R T_2 \ln \frac{1}{n_2}, \quad \text{где } n_2 = \frac{V_2}{V_3} = 5.$$

Подставляя известные числовые значения величин, входящих в правую часть этого равенства, и выполняя арифметические действия, находим

$$A_2 = 8,31 \cdot 10^3 \cdot 157 \cdot \frac{0,02}{2} \ln \frac{1}{5} = -2,10 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Знак минус показывает, что при сжатии газа работа совершается над газом внешними силами. График процесса приведен на рис. 9.

Пример 9. Тепловая машина работает по обратимому циклу Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500 \text{ К}$. Определить термический КПД η цикла и температуру T_2 охладителя тепловой машины, если за счет каждого килоджоуля теплоты, полученной от нагревателя, машина совершает работу $A = 350 \text{ Дж}$.

Решение. Термический КПД тепловой машины, называемый также коэффициентом использования теплоты, показывает, какая доля теплоты, полученной от нагревателя, превращается в механическую работу. Термический КПД выражается формулой

$$\eta = \frac{A}{Q_1},$$

где Q_1 — теплота, полученная от нагревателя; A — работа, совершенная рабочим телом тепловой машины.

Подставив числовые значения A и Q_1 , получим $\eta = \frac{350}{1000} = 0,35$.

Зная КПД цикла можно по формуле $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$ определить температуру охладителя T_2 :

$$T_2 = T_1 (1 - \eta).$$

Подставив сюда полученное значение КПД и температуру T_1 нагревателя, получим $T_2 = 500 (1 - 0,35) \text{ К} = 325 \text{ К}$.

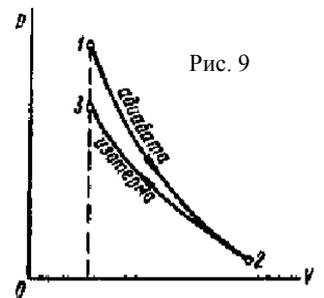


Рис. 9

ЭЛЕКТРОСТАТИКА, ПОСТОЯННЫЙ ТОК

Основные формулы

Закон Кулона
$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\epsilon r^2},$$

где F — сила взаимодействия двух точечных зарядов Q_1 и Q_2 ; r — расстояние между зарядами; ϵ — диэлектрическая проницаемость среды; ϵ_0 — электрическая постоянная:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м} = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$$

Закон сохранения заряда

$$\sum_{i=1}^n Q_i = \text{const},$$

где $\sum_{i=1}^n Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему; n — число зарядов.

Напряженность электрического поля

$$E = F/Q,$$

где F — сила, действующая на точечный положительный заряд Q , помещенный в данную точку поля.

Сила, действующая на точечный заряд Q , помещенный в электрическое поле

$$F = QE.$$

Поток вектора напряженности E электрического поля:

а) через произвольную поверхность S , помещенную в неоднородное поле,

$$\Phi_E = \int_S E \cos \alpha dS, \text{ или } \Phi_E = \int_S E_n dS,$$

где α — угол между вектором напряженности E и нормалью n к элементу поверхности; dS — площадь элемента поверхности; E_n — проекция вектора напряженности на нормаль;

б) через плоскую поверхность, помещенную в однородное электрическое поле,

$$\Phi_E = ES \cos \alpha.$$

Поток вектора напряженности E через замкнутую поверхность

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS,$$

где интегрирование ведется по всей поверхности.

Теорема Остроградского — Гаусса. Поток вектора напряженности E через любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды Q_1, Q_2, \dots, Q_n ,

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon} \sum_{i=1}^n Q_i,$$

где $\sum_{i=1}^n Q_i$ — алгебраическая сумма зарядов, заключенных внутри замкнутой поверхности; n — число зарядов.

Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} Q.$$

Напряженность электрического поля, создаваемого металлической сферой радиусом R , несущей заряд Q , на расстоянии r от центра сферы:

а) внутри сферы ($r < R$)

$$E = 0;$$

б) на поверхности сферы ($r = R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon R^2} Q;$$

в) вне сферы ($r > R$)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2} Q.$$

Принцип суперпозиции (наложения) электрических полей, согласно которому напряженность \vec{E} результирующего поля, созданного двумя (и более) точечными зарядами, равна векторной (геометрической) сумме напряженностей складываемых полей:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n.$$

В случае двух электрических полей с напряженностями \vec{E}_1 и \vec{E}_2 модуль вектора напряженности

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha},$$

где α — угол между векторами \vec{E}_1 и \vec{E}_2 .

Напряженность поля, создаваемого бесконечно длинной равномерно заряженной нитью (или цилиндром) на расстоянии r от ее оси,

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r} 2\tau,$$

где τ — линейная плотность заряда.

Линейная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по нити, к длине нити (цилиндра):

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta l}.$$

Напряженность поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью

$$E = \frac{1}{2 \epsilon_0 \epsilon} \sigma,$$

где σ — поверхностная плотность заряда.

Поверхностная плотность заряда есть величина, равная отношению заряда, распределенного по поверхности, к площади этой поверхности:

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}.$$

Напряженность поля, создаваемого двумя параллельными бесконечными равномерно и разноименно заряженными плоскостями, с

одинаковой по модулю поверхностной плотностью σ заряда (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon}$$

Приведенная формула справедлива для вычисления напряженности поля между пластинами плоского конденсатора (в средней части его) только в том случае, если расстояние между пластинами много меньше линейных размеров пластин конденсатора.

Электрическое смещение \vec{D} связано с напряженностью \vec{E} электрического поля соотношением

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}.$$

Это соотношение справедливо только для изотропных диэлектриков.

Поток вектора электрического смещения выражается аналогично потоку вектора напряженности электрического поля:

а) в случае однородного поля поток сквозь плоскую поверхность

$$\Delta \Psi = D \Delta S \cos \alpha;$$

б) в случае неоднородного поля и произвольной поверхности

$$\Delta \Psi = \int_n D dS;$$

где D_n — проекция вектора \vec{D} на направление нормали к элементу поверхности, площадь которой равна dS .

Теорема Остроградского — Гаусса. Поток вектора электрического смещения сквозь любую замкнутую поверхность, охватывающую заряды Q_1, Q_2, \dots, Q_n ,

$$\Psi = \sum_{i=1}^n Q_i,$$

где n — число зарядов (со своим знаком), заключенных внутри замкнутой поверхности.

Циркуляция вектора напряженности электрического поля есть величина, численно равная работе по перемещению единичного точечного положительного заряда вдоль замкнутого контура. Циркуляция выражается интегралом по замкнутому контуру $\oint E_l dl$, где E_l — проекция вектора напряженности \vec{E} в данной точке контура на направление касательной к контуру в той же точке.

В случае электростатического поля циркуляция вектора напряженности равна нулю:

$$\oint_l E_l dt = 0.$$

Потенциал электрического поля есть величина, равная отношению потенциальной энергии точечного положительного заряда, помещенную в данную точку поля, к этому заряду:

$$\varphi = \Pi/Q,$$

или потенциал электрического поля есть величина, равная отношению работы сил поля по перемещению точечного положительного заряда из данной точки поля в бесконечность к этому заряду:

$$\varphi = A/Q.$$

Потенциал электрического поля в бесконечности условно принят равным нулю.

Отметим, что при перемещении заряда в электрическом поле работа $A_{в.с}$ внешних сил равна по модулю работе $A_{с.п}$ сил поля и противоположна ей по знаку:

$$A_{в.с} = -A_{с.п}$$

Потенциал электрического поля, создаваемый точечным зарядом Q на расстоянии r от заряда

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Потенциал электрического поля, создаваемого металлической, несущей заряд сферой радиусом, на расстоянии от центра сферы:

внутри сферы $(r < R)$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R};$$

на поверхности сферы $(r = R)$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R};$$

вне сферы $(r > R)$

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0\epsilon R}.$$

Во всех приведенных для потенциала заряженной сферы формулах ϵ есть диэлектрическая проницаемость однородного безграничного диэлектрика, окружающего сферу.

Потенциал электрического поля, созданного системой n точечных зарядов, в данной точке в соответствии с принципом суперпозиции электрических полей равен алгебраической сумме потенциалов $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, создаваемых отдельными точечными зарядами Q_1, Q_2, \dots, Q_n :

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i .$$

Энергия W взаимодействия системы точечных зарядов Q_1, Q_2, \dots, Q_n определяется работой, которую эта система зарядов может совершить при удалении их относительно друг друга в бесконечность, и выражается формулой

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i \varphi_i ,$$

где φ_i – потенциал поля, создаваемого всеми $n-1$ зарядами (за исключением 1-го) в точке, где расположен заряд Q_i .

- Потенциал связан с напряженностью электрического поля соотношением

$$E = -\text{grad}\varphi .$$

В случае электрического поля, обладающего сферической симметрией, эта связь выражается формулой

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} \frac{1}{r}$$

или в скалярной форме

$$E = -\frac{d\varphi}{dr} ,$$

а в случае однородного поля, т. е. поля, напряженность которого в каждой точке его одинакова как по модулю, так и по направлению, $E = \left[\varphi_1 - \varphi_2 \right] d$,

где φ_1 и φ_2 – потенциалы точек двух эквипотенциальных поверхностей; d – расстояние между этими поверхностями вдоль электрической силовой линии.

Работа, совершаемая электрическим полем при перемещении точечного заряда Q из одной точки поля, имеющей потенциал φ_1 , в другую, имеющую потенциал φ_2

$$A = Q \left[\varphi_1 - \varphi_2 \right] , \text{ или } A = Q \int_L E_l dl ,$$

где E_l – проекция вектора напряженности \vec{E} на направление перемещения; dl – перемещение.

В случае однородного поля последняя формула принимает вид

$$A = QEl \cos \alpha ,$$

где l – перемещение; α – угол между направлениями вектора \vec{E} и перемещения \vec{l} .

Диполь есть система двух точечных электрических зарядов, равных по размеру и противоположных по знаку, расстояние между которыми значительно меньше расстояния от центра диполя до точек наблюдения.

Вектор \vec{l} , проведенный от отрицательного заряда диполя к его положительному заряду, называется плечом диполя.

Произведение заряда $|Q|$ диполя на его плечо \vec{l} называется электрическим моментом диполя:

$$P = |Q|\vec{l} .$$

Напряженность поля диполя

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha} ,$$

где P – электрический момент диполя; r – модуль радиуса-вектора, проведенного от центра диполя к точке, напряженность поля в которой нас интересует; α – угол между радиусом-вектором и плечом диполя.

Напряженность поля диполя в точке, лежащей на оси диполя ($\alpha = 0$),

$$E = \frac{P}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^3} ,$$

и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленном из его середины ($\alpha = \pi/2$),

$$E = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} .$$

Потенциал поля диполя

$$\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \cos \alpha .$$

Потенциал поля диполя в точке, лежащей на оси диполя ($\alpha = 0$),

$$\varphi = \frac{P}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} ,$$

и в точке, лежащей на перпендикуляре к плечу диполя, восстановленном из его середины ($\alpha = \pi/2$),

$$\varphi = 0 .$$

Механический момент, действующий на диполь с электрическим моментом \vec{P} , помещенный в однородное электрическое поле с напряженностью \vec{E} ,

$$\vec{M} = \vec{P} \times \vec{E} , \text{ или } M = pE \sin \alpha ,$$

где α – угол между направлениями векторов p и E .

Электрическая емкость уединенного проводника или конденсатора

$$C = \Delta Q / \Delta \varphi,$$

где ΔQ – заряд, сообщенный проводнику (конденсатору); $\Delta \varphi$ – изменение потенциала, вызванное зарядом.

Электрическая емкость уединенной проводящей сферы радиусом R , находящейся в бесконечной среде с диэлектрической проницаемостью ε ,

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R.$$

Если сфера полая и заполнена диэлектриком, то емкость ее от этого не изменяется.

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C = \varepsilon\varepsilon_0 S / d,$$

где S – площадь пластин (каждой пластины); d – расстояние между ними; ε – диэлектрическая проницаемость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами.

Электрическая емкость плоского конденсатора, заполненного n слоями диэлектриком толщиной d_i каждый с диэлектрическими проницаемостями ε_i (слоистый конденсатор),

$$C = \frac{S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2 + \dots + d_n/\varepsilon_n}.$$

Электрическая емкость сферического конденсатора (две концентрические сферы радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью)

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R_1 R_2 / (R_2 - R_1).$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной l и радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ε)

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln(R_2/R_1)}.$$

Электрическая емкость C последовательно соединенных конденсаторов:

$$\text{в общем случае } \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n},$$

где n – число конденсаторов;

$$\text{в случае двух конденсаторов } C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2};$$

в случае n одинаковых конденсаторов с емкостью C_1 каждый $C = C_1/n$.

Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов:

$$\text{в общем случае } C = C_1 + C_2 + \dots + C_n;$$

$$\text{в случае двух конденсаторов } C = C_1 + C_2;$$

$$\text{в случае } n \text{ одинаковых конденсаторов с емкостью } C_1 \text{ каждый } C = nC_1$$

Энергия заряженного проводника выражается через заряд Q , потенциал φ и электрическую емкость C проводника следующими соотношениями:

$$W = \frac{1}{2} C \varphi^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \varphi.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W = \frac{1}{2} C U^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q U,$$

где C – электрическая емкость конденсатора; U – разность потенциалов на его пластинах.

Объемная плотность энергии (энергия электрического поля, приходящаяся на единицу объема)

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} E D,$$

где E – напряженность электрического поля в среде с диэлектрической проницаемостью ε ; D – электрическое смещение.

Сила постоянного тока

$$I = Q/t,$$

где Q – количество электричества, прошедшее через поперечное сечение проводника за время t .

Плотность электрического тока есть векторная величина, равная отношению силы тока к площади S поперечного сечения проводника;

$$\vec{j} = \frac{I}{S} \vec{k},$$

где k – единичный вектор, по направлению совпадающий с направлением движения положительных носителей заряда.

Сопротивление однородного проводника

$$R = \rho l / S,$$

где ρ – удельное сопротивление вещества проводника; l – его длина.

Проводимость G проводника и удельная проводимость γ вещества

$$G = 1/R, \quad \gamma = 1/\rho.$$

Зависимость удельного сопротивления от температуры

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

где ρ и ρ_0 – удельные сопротивления соответственно при t и 0°C ; t – температура (по шкале Цельсия); α – температурный коэффициент сопротивления.

Сопротивление соединения проводников:

$$\text{последовательного } R = \sum_{i=1}^n R_i;$$

$$\text{параллельного } \frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}.$$

Здесь R_i – сопротивление i -го проводника; n – число проводников.

Закон Ома:

$$\text{для неоднородного участка цепи } I = \frac{\phi_1 - \phi_2 \pm E_{12}}{R} = \frac{U}{R};$$

$$\text{для однородного участка цепи } I = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R} = \frac{U}{R};$$

$$\text{для замкнутой цепи } (\phi_1 = \phi_2) \quad I = E/R.$$

Здесь $(\phi_1 - \phi_2)$ – разность потенциалов на концах участка цепи; E_{12} – ЭДС источников тока, входящих в участок; U – напряжение на участке цепи; R – сопротивление цепи (участка цепи); E – ЭДС всех источников тока цепи.

Правила Кирхгофа. Первое правило: алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0,$$

где n – число токов, сходящихся в узле.

Второе правило: в замкнутом контуре алгебраическая сумма напряжений на всех участках контура равна алгебраической сумме электродвижущих сил, т. е.

$$\sum_{i=1}^n I_i R_i = \sum_{i=1}^k E_i,$$

где I_i – сила тока на i -м участке; R_i – активное сопротивление на i -м участке; E_i – ЭДС источников тока на i -м участке; i – число участков, содержащих активное сопротивление; k – число участков, содержащих источники тока.

Работа, совершаемая электростатическим полем и сторонними силами в участке цепи постоянного тока за время t ,

$$A = IUt.$$

Мощность тока

$$P = IU.$$

Закон Джоуля — Ленца

$$Q = I^2 R t,$$

где Q – количество теплоты, выделяющееся в участке цепи за время t .

Закон Джоуля — Ленца справедлив при условии, что участок цепи неподвижен в нем не совершаются химические превращения.

Плотность тока \vec{j} , средняя скорость $\langle \vec{v} \rangle$ упорядоченного движения носителей заряда и их концентрация n связаны соотношением

$$\vec{j} = en \langle \vec{v} \rangle,$$

где e – элементарный заряд.

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\vec{j} = \gamma \vec{E},$$

где γ – удельная проводимость проводника; E – напряженность электрического поля.

Закон Джоуля — Ленца в дифференциальной форме

$$w = \gamma E^2,$$

где w – объемная плотность тепловой мощности.

Удельная электрическая проводимость

$$\gamma = \frac{1}{2} e^2 n \langle l \rangle / m u,$$

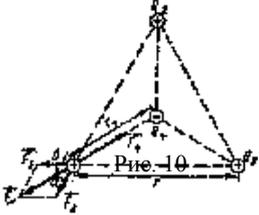
где e и m – заряд и масса электрона; n – концентрация электронов; $\langle l \rangle$ – средняя длина их свободного пробега; u – средняя скорость хаотического движения электронов.

Примеры решения задач

Пример 1. Три одинаковых положительных заряда, $Q_1 = Q_2 = Q_3 = 1 \text{ нКл}$, расположены в вершинах равностороннего треугольника. Какой заряд Q_4 нужно поместить в центре треугольника, чтобы указанная система зарядов находилась в равновесии?

Решение. Все три заряда, расположенных по вершинам треугольника, находятся в одинаковых условиях. Поэтому достаточно выяснить, какой заряд следует поместить в центре треугольника, чтобы какой-нибудь один из трех зарядов, например Q_1 , находился в равновесии. Заряд Q_1 будет находиться в равновесии, если векторная сумма действующих на него сил равна нулю (рис. 10):

$$\sum_{i=2}^4 \vec{F}_i = \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F} + \vec{F}_4 = 0, \quad (1)$$



где $\vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ — силы, с которыми соответственно действуют на заряд Q_1 заряды Q_2, Q_3, Q_4 ; \vec{F} — равнодействующая сил \vec{F}_2 и \vec{F}_3 .

Так как силы \vec{F} и \vec{F}_4 направлены по одной прямой в противоположные стороны, то векторное равенство (1) можно заменить скалярным равенством

$$F - F_4 = 0,$$

откуда

$$F = F_4.$$

Выразив в последнем равенстве F через F_2 и F_3 и учитывая, что $F_3 = F_2$, получим

$$F_4 = F_2 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

Применяя закон Кулона и имея в виду, что $Q_2 = Q_3 = Q_1$, найдем

$$\frac{Q_1 Q_4}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r_1^2} = \frac{Q_1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)};$$

откуда

$$Q_4 = \frac{Q_1 r_1^2}{r^2} \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}. \quad (2)$$

Из геометрических построений в равностороннем треугольнике следует, что

$$r_1 = \frac{r/2}{\cos 30^\circ} = \frac{r}{2 \cos 30^\circ},$$

$$\cos \alpha = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

учетом этого формула (2) примет вид

$$Q_4 = \frac{Q_1}{\sqrt{3}}.$$

Подставив сюда числовое значение $Q_1 = 1 \text{ нКл} = 10^{-9} \text{ Кл}$, получим

$$Q_4 = \frac{10^{-9}}{\sqrt{3}} \text{ Кл} = 5,77 \cdot 10^{-10} \text{ Кл} = 577 \text{ пКл}.$$

Следует отметить, что равновесие системы зарядов будет неустойчивым

Пример 2. Тонкий стержень длиной $l = 20 \text{ см}$ несет равномерно распределенный заряд. На продолжении оси стержня на расстоянии $a = 10 \text{ см}$ от ближайшего конца находится точечный заряд $Q_1 = 40 \text{ нКл}$, который взаимодействует со стержнем с силой $F = 6 \text{ мкН}$. Определить линейную плотность τ заряда на стержне.



Решение. Сила взаимодействия F заряженного стержня с точечным зарядом Q_1 зависит от линейной плотности τ заряда на стержне. Зная эту зависимость, можно определить τ . При вычислении силы F следует иметь в виду, что заряд на стержне не является точечным, поэтому закон Кулона непосредственно применить нельзя. В этом случае можно поступить следующим образом. Выделить на стержне (рис. 11) дифференциально малый участок dr с зарядом $dQ = \tau dr$. Этот заряд

можно рассматривать как точечный. Тогда согласно закону Кулона

$$dF = \frac{Q_1 \tau dr}{4\pi \epsilon_0 r^2}.$$

Рис. 11

Интегрируя это выражение в пределах от a до $a + l$, получим

$$F = \frac{Q_1 \tau}{4\pi \epsilon_0} \int_a^{a+l} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_1 \tau}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a+l} \right) = \frac{Q_1 \tau l}{4\pi \epsilon_0 a(a+l)},$$

откуда интересующая нас линейная плотность заряда

$$\tau = \frac{4\pi \epsilon_0 a(a+l)F}{Q_1 l}.$$

Выразим все величины в единицах СИ: $Q_1 = 40 \text{ нКл} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ Кл}$;

$$F = 6 \text{ мкН} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Н}; l = 0,2 \text{ м}; a = 0,1 \text{ м}; 4\pi\epsilon_0 = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \text{ Ф/м}.$$

Подставим числовые значения в полученную формулу и произведем вы-

$$\text{числения: } \tau = \frac{0,1(0,1 + 0,2) \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{9 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^{-8} \cdot 0,2} \text{ Кл/м} = 2,5 \cdot 10^{-9} \text{ Кл/м} = 2,5 \text{ нКл/м}.$$

Пример 3. Два точечных электрических заряда $Q_1 = 1 \text{ нКл}$ и $Q_2 = -2 \text{ нКл}$ находятся в воздухе на расстоянии $d = 10 \text{ см}$ друг от друга. Определить напряженность E и потенциал ϕ поля, создаваемого этими зарядами в точке A , удаленной от заряда Q_1 на расстояние $r_1 = 9 \text{ см}$ и от заряда Q_2 на $r_2 = 7 \text{ см}$.

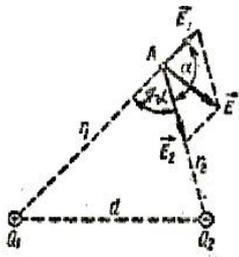


Рис. 12
вторым зарядом

Решение. Согласно принципу суперпозиции электрических полей каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов. Поэтому напряженность \vec{E} электрического поля в искомой точке может быть найдена как геометрическая сумма, напряженностей \vec{E}_1 и \vec{E}_2 полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Напряженность электрического поля, создаваемого в воздухе ($\epsilon = 1$) первым зарядом,

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2}; \quad (1)$$

$$E_2 = \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2}. \quad (2)$$

Вектор E_1 (рис. 12) направлен по силовой линии от заряда Q_1 , так как заряд Q_1 положителен; вектор \vec{E}_2 направлен также по силовой линии, но к заряду Q_2 , так как заряд Q_2 отрицателен.

Абсолютное значение вектора \vec{E} найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos \alpha}, \quad (3)$$

где α — угол между векторами E_1 и E_2 , который может быть найден из треугольника со сторонами r_1 , r_2 и d :

$$\cos \alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

В данном случае во избежание громоздких записей удобно значение $\cos \alpha$ вычислить отдельно:

$$\cos \alpha = \frac{(0,1)^2 - (0,09)^2 - (0,07)^2}{2 \cdot 0,09 \cdot 0,07} = -0,238.$$

Подставляя выражения E_1 из формулы (1) и E_2 из формулы (2) в равенство (3) и вынося общий множитель $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ за знак корня, получим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \sqrt{\frac{Q_1^2}{r_1^4} + \frac{Q_2^2}{r_2^4} + 2 \frac{Q_1Q_2}{r_1^2r_2^2} \cos \alpha}. \quad (4)$$

Подставив числовые значения величин в формулу (4), получим:

$$E = 3,58 \cdot 10^3 \text{ В/м} = 3,58 \text{ кВ/м}$$

При вычислении E знак заряда Q_2 опущен, так как знак заряда определяет направление вектора напряженности, а направление E_2 было учтено при его графическом изображении (см. рис. 12).

В соответствии с принципом суперпозиции электрических полей потенциал ϕ результирующего поля, созданного двумя зарядами Q_1 и Q_2 , равен алгебраической сумме потенциалов, т. е.

$$\phi = \phi_1 + \phi_2. \quad (5)$$

Потенциал электрического поля, создаваемого в вакууме точечным зарядом Q на расстоянии r от него, выражается формулой

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (6)$$

В нашем случае согласно формулам (5) и (6) получим

$$\phi = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2}.$$

или

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1} + \frac{Q_2}{r_2} \right).$$

Подставив в это выражение числовые значения физических величин, получим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9}} \left(\frac{10^{-9}}{0,09} + \frac{-2 \cdot 10^{-9}}{0,07} \right) \text{В} = -157 \text{В}$$

Пример 4. Точечный заряд $Q = 25$ нКл находится в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с поверхностной плотностью $\sigma = 0,2$ нКл/см². Определить силу F , действующую на заряд, если его расстояние от оси цилиндра равно 10 см.

Решение. Численное значение силы F , действующей на точечный заряд Q , находящийся в поле, определяется по формуле

$$F = QE, \quad (1)$$

где E — напряженность поля.

Как известно, напряженность поля бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad (2)$$

где τ — линейная плотность заряда.

Выразим линейную плотность τ через поверхностную плотность σ . Для этого выделим элемент цилиндра длиной l и выразим находящийся на нем заряд Q двумя способами:

$$Q = \sigma S = \sigma 2\pi R l;$$

$$Q = \tau l.$$

Приравняв правые части этих равенств, получим

$$\tau l = 2\pi R \sigma l.$$

После сокращения на l найдем

$$\tau = 2\pi R \sigma.$$

С учетом этого формула (2) примет вид

$$E = \frac{R\sigma}{\epsilon_0 r}.$$

Подставив это выражение в (1), получим искомую силу F :

$$F = \frac{Q\sigma R}{\epsilon_0 r}. \quad (3)$$

Выпишем в единицах СИ числовые значения величин Q, σ и ϵ_0 : $Q = 25$ нКл = $2,5 \cdot 10^{-8}$ Кл; $\sigma = 0,2$ нКл/см² = $2 \cdot 10^{-6}$ Кл/м²; $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

Так как R и r входят в формулу в виде отношения, то они могут быть выражены в любых, но только одинаковых единицах.

Подставим в (3) числовые значения величин:

$$F = \frac{2,5 \cdot 10^{-8} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot 1}{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10} \text{Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{Н} = 565 \text{ мкН}.$$

Направление силы \vec{F} совпадает с направлением напряженности \vec{E} , а последняя в силу симметрии (цилиндр бесконечно длинный) направлена перпендикулярно поверхности цилиндра.

Пример 5. На пластинах плоского конденсатора находится заряд $Q = 10$ нКл. Площадь S каждой пластины конденсатора равна 100 см², диэлектрик — воздух. Определить силу F , с которой притягиваются пластины. Поле между пластинами считать однородным.

Решение. Заряд Q одной пластины находится в поле, созданном зарядом другой пластины конденсатора. Следовательно, на первый заряд действует сила (рис. 13)

$$F = QE_1, \quad (1)$$

где E_1 — напряженность поля, создаваемого зарядом одной пластины. Но

$$E_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}, \quad (2)$$

где σ — поверхностная плотность заряда пластины. Формула (1) с учетом выражения (2) примет вид

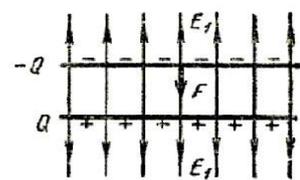
$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S}.$$

Подставив числовые значения величин в формулу (3), получим

$$F = \frac{10^{-16}}{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-2}} \text{Н} = 5,65 \cdot 10^{-4} \text{Н}.$$

Пример 6. Электрическое поле создано длинным цилиндром радиусом $R = 1$ см, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 20$ нКл/м. Определить разность потенциалов двух точек этого поля, находящихся на расстоянии $a_1 = 0,5$ см и $a_2 = 2$ см от поверхности цилиндра, в средней его части.

Решение. Для определения разности потенциалов воспользуемся соотношением между напряженностью поля и изменением потенциала



$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi.$$

Для поля с осевой симметрией, каким является поле цилиндра, это соотношение можно записать в виде

$$E = -\frac{d\varphi}{dr}, \text{ или } d\varphi = -E dr.$$

Интегрируя это выражение, найдем разность потенциалов двух точек, отстоящих на расстояниях r_1 и r_2 от оси цилиндра:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \int_{r_1}^{r_2} E dr. \quad (1)$$

Так как цилиндр длинный и точки взяты вблизи его средней части, то для выражения напряженности поля можно воспользоваться формулой напряженности поля, создаваемого бесконечно длинным цилиндром:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}.$$

Подставив это выражение E в (1), получим

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\tau}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

или

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Подставим числовые значения в (2):

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2 \cdot 10^{-8} \cdot 1,8 \cdot 10^{10} \ln \frac{3}{1,5} = 3,6 \cdot 10^2 \cdot 2,3 \cdot \lg 2 \text{ В} = 250 \text{ В}$$

Пример 7. Определить ускоряющую разность потенциалов U , которую должен пройти в электрическом поле электрон, обладающий скоростью $v_1 = 10^6$ м/с, чтобы скорость его возросла в $n = 2$ раза.

Решение. Ускоряющую разность потенциалов можно найти, вычислив работу A сил электростатического поля. Эта работа определяется произведением заряда электрона e на разность потенциалов U :

$$A = eU. \quad (1)$$

Работа сил электростатического поля в данном случае равна изменению кинетической энергии электрона:

$$A = T_2 - T_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (2)$$

где T_1 и T_2 — кинетические энергии электрона до и после прохождения ускоряющего поля; m — масса электрона; v_1 и v_2 — начальная и конечная скорости его.

Приравняв правые части равенств (1) и (2), получим

$$eU = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

или

$$eU = \frac{m^2 v_2^2}{2} - \frac{m v_1^2}{2},$$

где $n = \frac{v_2}{v_1}$.

Отсюда искомая разность потенциалов

$$U = \frac{m v_1^2}{2e} (n^2 - 1). \quad (3)$$

Подставим числовые значения физических величин и выполним вычисления:

$$U = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot (10^6)^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} (2^2 - 1) \text{ В} = 8,53 \text{ В}$$

Пример 8. Конденсатор емкостью $C_1 = 3$ мкФ был заряжен до разности потенциалов $U_1 = 40$ В. После отключения от источника тока конденсатор был соединен параллельно с другим незаряженным конденсатором емкостью $C_2 = 5$ мкФ. Какая энергия W израсходуется на образование искры в момент присоединения второго конденсатора?

Решение. Энергия W' , израсходованная на образование искры,

$$W' = W_1 - W_2, \quad (1)$$

где W_1 — энергия, которой обладал первый конденсатор до присоединения к нему второго конденсатора; W_2 — энергия, которую имеет батарея, составленная из первого и второго конденсаторов.

Энергия заряженного конденсатора определяется по формуле

$$W = \frac{CU^2}{2}, \quad (2)$$

где C – емкость конденсатора или батареи конденсаторов; U – разность потенциалов на обкладках конденсаторов.

Выразив в формуле (1) энергии W_1 и W_2 по формуле (2) и принимая во внимание, что общая емкость параллельно соединенных конденсаторов равна сумме емкостей отдельных конденсаторов, получим

$$W' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{C_1 + C_2}{2} U_2^2, \quad (3)$$

где C_1 и C_2 – емкости первого и второго конденсаторов; U_1 – разность потенциалов, до которой был заряжен первый конденсатор; U_2 – разность потенциалов на зажимах батареи конденсаторов.

Учитывая, что заряд после присоединения второго конденсатора остался прежний, выразим разность потенциалов U_2 следующим образом:

$$U_2 = \frac{Q}{C_1 + C_2} = \frac{C_1 U_1}{C_1 + C_2}.$$

Подставив выражение U_2 в формулу (3), получим

$$W' = \frac{C_1 U_1^2}{2} - \frac{(C_1 + C_2) C_1^2 U_1^2}{2(C_1 + C_2)^2}.$$

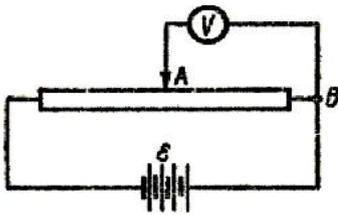
После простых преобразований найдем

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} U_1^2.$$

В полученное выражение подставим числовые значения и вычислим W' .

$$W' = \frac{1}{2} \cdot \frac{3 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-6}}{3 \cdot 10^{-6} + 5 \cdot 10^{-6}} \cdot 1600 \text{ Дж} = 1,5 \text{ мДж}.$$

Пример 9. Потенциометр с сопротивлением $r = 100$ Ом подключен к батарее, ЭДС которой $\varepsilon = 150$ В и внутреннее сопротивление $r_i = 50$ Ом. Определить показание вольтметра с сопротивлением $r_g = 500$ Ом, соединенного с одной из клемм потенциометра и подвижным контактом, установленным посередине потенциометра. Какова разность потенциалов между теми же точками потенциометра при отключении вольтметра?



Решение. Показание U_1 вольтметра, подключенного к точкам A и B (рис. 14), определяется по формуле

$$U_1 = I_1 r_i, \quad (1)$$

где I_1 – сила тока в неразветвленной части цепи; r_i – сопротивление параллельно соединенных вольтметра и половины потенциометра. Силу тока I_1 найдем по закону Ома для всей цепи

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{r_g + r_i}, \quad (2)$$

где r_g – сопротивление внешней цепи.

Внешнее сопротивление r_g есть сумма двух сопротивлений:

$$r_g = \frac{r}{2} + r_i. \quad (3)$$

Сопротивление r_i параллельного соединения может быть найдено по формуле

$$\frac{1}{r_i} = \frac{1}{r_g} + \frac{1}{\frac{r}{2}},$$

откуда

$$r_i = \frac{r r_g}{r + 2r_g}$$

Подставив числовые значения, найдем

$$r_i = \frac{100 \cdot 500}{100 + 2 \cdot 500} \text{ Ом} = 45,5 \text{ Ом}$$

Подставив в выражение (2) правую часть равенства (3), определим силу тока:

$$I_1 = \frac{\varepsilon}{\frac{r}{2} + r_i + r_i} = \frac{150}{50 + 45,5 + 50} \text{ А} = 1,03 \text{ А}.$$

Если подставить значение I_1 и r_i в формулу (1), то можно определить показание вольтметра:

$$U_1 = 1,03 \cdot 45,5 \text{ В}.$$

Разность потенциалов между точками A и B при отключенном вольтметре равна произведению силы тока I_2 на половину сопротивления потенциометра, т. е.

$$U_2 = I_2 \frac{r}{2}, \text{ или } U_2 = \frac{\varepsilon}{r+r_i} \frac{r}{2}.$$

Подставляя сюда числовые значения, получим

$$U_2 = \frac{150}{100+50} \cdot \frac{100}{2} \text{ В} = 50 \text{ В}.$$

Пример 10. Сила тока в проводнике сопротивлением $r = 20$ Ом нарастает в течение времени $\Delta t = 2$ с по линейному закону от $I_0 = 0$ до $I = 6$ А (рис. 15). Определить теплоту Q_1 , выделившуюся в этом проводнике за первую и Q_2 — за

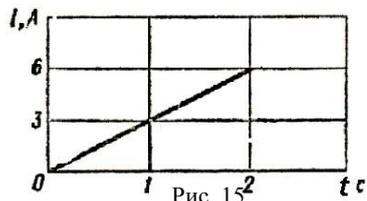


Рис. 15

вторую секунды, а также найти отношение $\frac{Q_2}{Q_1}$

Решение. Закон Джоуля — Ленца в виде $Q = I^2 r t$ справедлив для случая постоянного тока ($I = \text{const}$). Если же сила тока в проводнике изменяется, то указанный закон справедлив для бесконечно малого промежутка времени и записывается в виде

$$dQ = I^2 r dt. \quad (1)$$

Здесь сила тока I является некоторой функцией времени. В нашем случае

$$I = kt, \quad (2)$$

где k — коэффициент пропорциональности, численно равный приращению силы тока в единицу времени, т. е.

$$k = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{6}{2} \text{ А/с}.$$

С учетом (2) формула (1) примет вид

$$dQ = k^2 r t dt. \quad (3)$$

Для определения теплоты, выделившейся за конечный промежуток времени Δt , выражение (3) надо проинтегрировать в

пределах от t_1 до t_2 :

$$Q = k^2 r \int_{t_1}^{t_2} t^2 dt = \frac{1}{3} k^2 r (t_2^3 - t_1^3).$$

При определении теплоты, выделившейся за первую секунду, пределы интегрирования $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ с и, следовательно,

$$Q = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 20(1-0) \text{ Дж} = 60 \text{ Дж}.$$

При определении теплоты Q_2 пределы интегрирования $t_1 = 1$ с, $t_2 = 2$ с и $Q = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{6}{2}\right)^2 \cdot 20(8-1) \text{ Дж} = 420 \text{ Дж}.$

Следовательно,

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{420}{60} = 7, \quad \text{т. е. за вторую секунду выделится теплоты в 7 раз больше, чем за первую}.$$

Пример 11. Электрическая цепь состоит из двух гальванических элементов, трех сопротивлений и гальванометра (рис. 16). В этой цепи $r_1 = 100$ Ом, $r_2 = 50$ Ом, $r_3 = 20$ Ом, ЭДС элемента $\varepsilon_1 = 2$ В. Гальванометр регистрирует ток $I_3 = 50$ мА, идущий в направлении, указанном стрелкой. Определить ЭДС ε_2 второго элемента. Сопротивлением гальванометра и внутренним сопротивлением элементов пренебречь.

Указание. Для расчета разветвленных цепей применяются законы Кирхгофа.

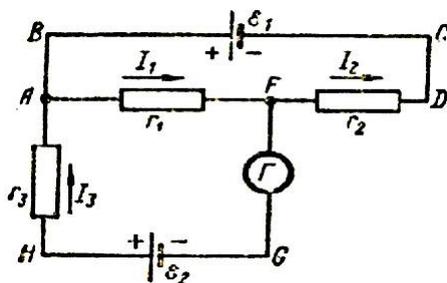


Рис. 16

Первый закон Кирхгофа. Алгебраическая сумма сил токов, сходящихся в узле, равна нулю, т. е.

$$\sum I_i = 0.$$

Второй закон Кирхгофа. В любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений на отдельных участках цепи равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в контуре.

На основании этих законов можно составить уравнения, необходимые для определения искомых величин (сил токов, сопротивлений и ЭДС).

Применяя законы Кирхгофа, следует соблюдать следующие правила:

1. Перед составлением уравнений произвольно выбрать: а) направления токов (если они не заданы по условию задачи) и указать их стрелками на чертеже; б) направление обхода контуров.

2. При составлении уравнений по первому закону Кирхгофа считать токи, подходящие к узлу, положительными; токи, отходящие от узла, отрицательными.

Число уравнений, составляемых по первому закону Кирхгофа, должно быть на единицу меньше числа узлов, содержащихся в цепи.

3. При составлении уравнений по второму закону Кирхгофа надо считать, что: а) падение напряжения на участке цепи (т. е. произведение Ir) входит в уравнение со знаком плюс, если направление тока в данном участке совпадает с выбранным направлением обхода контура; в противном случае произведение Ir входит в уравнение со знаком минус; б) ЭДС входит в уравнение со знаком плюс, если она повышает потенциал в направлении обхода контура, т. е. если при обходе приходится идти от минуса к плюсу внутри источника тока; в противном случае ЭДС входит в уравнение со знаком минус.

Число независимых уравнений, которые могут быть составлены по второму закону Кирхгофа, должно быть меньше числа замкнутых контуров, имеющих в цепи. Для составления уравнений первый контур можно выбирать произвольно. Все последующие контуры следует выбирать таким образом, чтобы в каждый новый контур входила хотя бы одна ветвь цепи, не участвовавшая ни в одном из ранее использованных контуров. Если при решении уравнений, составленных указанным выше способом, получены отрицательные значения силы тока или сопротивления, то это означает, что ток через данное сопротивление в действительности течет в направлении, противоположном произвольно выбранному.

Решение. Выберем направления токов, как они показаны на рис. 16, и условимся обходить контуры по часовой стрелке.

По первому закону Кирхгофа для узла F имеем

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0. \quad (1)$$

По второму закону Кирхгофа имеем для контура $ABCDFA$

$$-I_1 r_1 - I_2 r_2 = -\varepsilon_1$$

или после умножения обеих частей равенства на -1

$$I_1 r_1 + I_2 r_2 = \varepsilon_1. \quad (2)$$

Соответственно для контура $AFGHA$ найдем:

$$I_1 r_1 + I_3 r_3 = \varepsilon_2. \quad (3)$$

После подстановки известных числовых значений в формулы (1)–(3) получим:

$$I_1 - I_2 - 0,05 = 0;$$

$$50I_1 + 25I_2 = 1;$$

$$100I_1 - 0,05 \cdot 20 = \varepsilon_2;$$

Перенеся в этих уравнениях неизвестные величины в левые части, а известные — в правые, получим следующую систему уравнений:

$$I_1 - I_2 = 0,05;$$

$$50I_1 + 25I_2 = 1;$$

$$100I_1 - \varepsilon_2 = -1.$$

Решая данную систему уравнений, получим

$$\varepsilon_2 = 4 \text{ В.}$$

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Основные формулы

Закон Био – Савара – Лапласа
$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} [dlr] \frac{I}{r^3},$$

где dB – магнитная индукция поля, создаваемого элементом проводника с током; μ – магнитная проницаемость; μ_0 – магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м); dl – вектор, равный по модулю длине проводника dl и совпадающий по направлению с током (элемент проводника); I – сила тока; r – радиус-вектор, проведенный от середины элемента проводника к точке, магнитная индукция в которой определяется.

Модуль вектора dB выражается формулой
$$dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I \sin \alpha}{r^2} dl,$$

где α – угол между векторами dl и r .

Магнитная индукция B связана с напряженностью H магнитного поля (в случае однородной, изотропной среды) соотношением

$$B = \mu_0 \mu H \text{ или в вакууме } B_0 = \mu_0 H.$$

Магнитная индукция в центре кругового проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2} \frac{I}{R},$$

где R – радиус кривизны проводника.

Магнитная индукция поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводником с током,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r},$$

где r – расстояние от оси проводника.

Магнитная индукция поля, создаваемого отрезком проводника,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2).$$

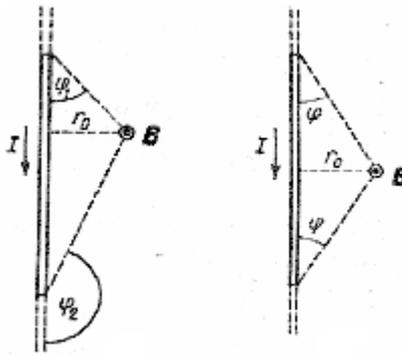


Рис.22а

Рис.22б

Обозначения ясны из рис. 22,а. Вектор индукции B перпендикулярен плоскости чертежа, направлен к нам и поэтому изображен точкой.

При симметричном расположении концов проводника относительно точки, в которой определяется магнитная индукция (рис.22,б), $-\cos\varphi_2 = \cos\varphi_1 = \cos\varphi$ и, следовательно,

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I}{r_0} \cos\varphi.$$

Магнитная индукция поля, создаваемого соленоидом в средней его части (или тороида на его оси)

$$B = \mu_0 \mu n I,$$

где n – число витков, приходящихся на единицу длины соленоида; I – сила тока в одном витке.

Принцип суперпозиции магнитных полей: магнитная индукция B результирующего поля равна векторной сумме B_1, B_2, \dots, B_n , магнитных индукций складываемых полей, т.е.

$$4. \quad B = \sum_{i=1}^n B_i.$$

В частном случае наложения двух полей

$$B = B_1 + B_2,$$

а модуль магнитной индукции

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1 B_2 \cos\alpha},$$

где α – угол между векторами B_1 и B_2 .

Закон Ампера. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле,

$$F = [lB]I,$$

где I – сила тока; l – вектор, равный по модулю длине l проводника и совпадающий по направлению с током; B – магнитная индукция поля.

Модуль вектора F определяется выражением

$$F = B l \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами l и B .

Сила взаимодействия двух прямых бесконечно длинных параллельных проводников с токами I_1 и I_2 , находящихся на расстоянии d друг от друга, рассчитанная на отрезок проводника длиной l , выражается формулой

$$F = \frac{\mu_0 \mu}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{d} l.$$

Магнитный момент контура с током

$$\rho_m = IS,$$

где S – вектор, равный по модулю площади S , охватываемой контуром, и совпадающий по направлению с нормалью к его плоскости.

Механический момент, действующий на контур с током, помещенный в однородное магнитное поле,

$$M = [p_m B].$$

Модуль механического момента

$$M = p_m B \sin\alpha,$$

где α – угол между векторами p_m и B .

Потенциальная (механическая) энергия контура с током в магнитном поле

$$\Pi_{\text{мех}} = p_m B = p_m B \cos\alpha.$$

Сила, действующая на контур с током в магнитном поле (изменяющемся вдоль оси x)

$$F = p_m \frac{\partial B}{\partial x} \cos\alpha,$$

где $\frac{\partial B}{\partial x}$ – изменение магнитной индукции вдоль оси Ox , рассчитанное на единицу длины; α – угол между векторами p_m и B .

Сила F , действующая на заряд Q , движущийся со скоростью v в магнитном поле с индукцией B (сила Лоренца), выражается формулой

$$F = Q[vB] \text{ или } F = |Q|vB \sin \alpha,$$

где α – угол, образованный вектором v скорости движущейся частицы и вектором B индукции магнитного поля.

Циркуляция вектора магнитной индукции B вдоль замкнутого контура

$$\oint_L B_i dl,$$

где B_i – проекция вектора магнитной индукции на направление элементарного перемещения dl вдоль контура L .

Циркуляция вектора напряженности H вдоль замкнутого контура

$$\oint_L H_i dl.$$

Закон полного тока (для магнитного поля в вакууме)

$$\oint_L B_i dl = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i,$$

где μ_0 – магнитная постоянная; $\sum_{i=1}^n I_i$ – алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром; n – число токов.

Закон полного тока (для произвольной среды)

$$\oint_L H_i dl = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i.$$

Магнитный поток Φ через плоский контур площадью S :

а) в случае однородного поля

$$\Phi = BS \cos \alpha; \text{ или } \Phi = B_n S,$$

где α – угол между вектором нормали n к плоскости контура и вектором магнитной индукции B ; B_n – проекция вектора B на нормаль n $B_n = B \cos \alpha$;

б) в случае неоднородного поля

$$\Phi = \int_S B_n dS,$$

где интегрирование ведется во всей поверхности S .

Потокоосцепление, т. е. полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида или тороида,

$$\Psi = N\Phi,$$

где Φ – магнитный поток через один виток; N – число витков соленоида или тороида.

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле

$$A = I\Delta\Phi,$$

где $\Delta\Phi$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром; I – сила тока в контуре.

Основной закон электромагнитной индукции (закон Фарадея — Максвелла)

$$E_i = N \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{d\Psi}{dt},$$

где E_i – электродвижущая сила индукции; N – число витков контура; Ψ – потокоосцепление.

Частные случаи применения основного закона электромагнитной индукции:

а) разность потенциалов U на концах проводника длиной l , движущегося со скоростью v в однородном магнитном поле,

$$U = Blv \sin \alpha,$$

где α – угол между направлениями векторов скорости v и магнитной B индукции;

б) электродвижущая сила индукции E_i , возникающая в рамке, содержащей N витков, площадью S , при вращении рамки с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле с индукцией B

$$E_i = BNS\omega \sin \omega t,$$

где ωt – мгновенное значение угла между вектором B и вектором нормали n к плоскости рамки.

Количество электричества Q , протекающего в контуре

$$Q = \Delta\Psi/R,$$

где R – сопротивление контура; $\Delta\Psi$ – изменение потокоосцепления.

Электродвижущая сила самоиндукции, возникающая в замкнутом контуре при изменении силы тока в нем

$$E_i = -L \frac{dI}{dt}, \text{ или } \langle E_i \rangle = -L \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

где L – индуктивность контура.

Потокоосцепление контура

$$\Psi = LI,$$

где L – индуктивность контура.
Индуктивность соленоида (тороида)

$$L = \mu_0 \mu n^2 V.$$

Во всех случаях вычисления индуктивности соленоида (тороида) с сердечником по приведенной формуле для определения магнитной проницаемости следует пользоваться графиком зависимости B от H , а затем формулой

$$\mu = B / (\mu_0 H).$$

Мгновенное значение силы тока I в цепи, обладающей активным сопротивлением R и индуктивностью L :
а) после замыкания цепи

$$I = \frac{E}{r} (1 - e^{-(R/L)t}),$$

где E_i – ЭДС источника тока; t – время, прошедшее после замыкания цепи;

б) после размыкания цепи

$$I = I_0 e^{-(R/L)t},$$

где I_0 – сила тока в цепи при $t = 0$; t – время, прошедшее с момента размыкания цепи.

Энергия W магнитного поля, создаваемого током в замкнутом контуре индуктивностью L , определяется формулой

$$W = \frac{1}{2} LI^2,$$

где W – энергия магнитного поля.

Объемная (пространственная) плотность энергии однородного магнитного поля (например, поля длинного соленоида)

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}.$$

Формула Томсона. Период собственных колебаний в контуре без активного сопротивления

$$T = 2\pi\sqrt{LC},$$

где L – индуктивность контура; C – его емкость.

Связь длины электромагнитной волны с периодом T и частотой ν колебаний

$$\lambda = cT \text{ или } \lambda = c/\nu,$$

где c – скорость электромагнитных волн в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Скорость электромагнитных волн в среде

$$v = c/\sqrt{\epsilon\mu},$$

где ϵ – диэлектрическая проницаемость; μ – магнитная проницаемость среды.

Примеры решения задач

Пример 1. По длинному прямому тонкому проводу течет ток силой $I = 20$ А. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого проводником в точке, удаленной от него на расстояние $r = 4$ см.

Решение. Магнитное поле, создаваемое прямым бесконечно длинным проводником ничтожно малого сечения обладает осевой симметрией. Это значит, что абсолютная величина B магнитной индукции \vec{B} в данной точке будет зависеть только от ее расстояния до проводника. Поэтому все точки на окружности радиуса (рис. 23), лежащей в плоскости, перпендикулярной проводнику, будут иметь одинаковое значение магнитной индукции;

$$B = \mu_0 \frac{I}{2\pi r}, \quad (1)$$

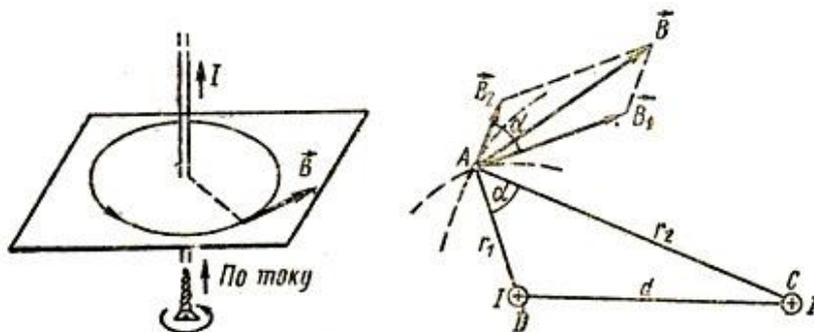
где μ_0 – магнитная постоянная.

Направление вектора B зависит от положения точки на окружности и от направления силы тока в проводнике.

Вектор \vec{B} направлен по касательной к проведенной нами окружности (это следует из закона Био — Савара — Лапласа, записанного в векторной форме). Линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением вектора магнитной индукции, называется магнитной силовой линией. Окружность на рис. 23 удовлетворяет этому условию, а следовательно, является магнитной силовой линией. Направление магнитной силовой линии, а значит, и вектора \vec{B} определено по правилу правого винта.

В формулу (1) подставим числовые значения величин и произведем вычисления:

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{20}{2\pi \cdot 4 \cdot 10^{-2}} \text{ Т} = 10^{-4} \text{ Т}, B = 0,1 \text{ мТ}.$$



Пример 2. Два параллельных бесконечно длинных провода D и C , по которым текут в одном направлении токи силой $I = 60$ А, расположены на расстоянии $d = 10$ см друг от друга. Определить магнитную индукцию B поля, создаваемого проводниками с током в точке A , отстоящей от одного проводника на расстоянии $r_1 = 5$ см, от другого на расстоянии $r_2 = 12$ см.

Решение. Для нахождения магнитной индукции \vec{B} в указанной точке A (рис. 24) воспользуемся принципом суперпозиции магнитных полей. Для этого определим направления векторов магнитной индукции B_1 и B_2 полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и сложим их геометрически:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Абсолютное значение магнитной индукции B может быть найдено по теореме косинусов:

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha}, \quad (1)$$

где α — угол между векторами \vec{B}_1 и \vec{B}_2 .

Значения магнитных индукций B_1 и B_2 выражаются соответственно через силу тока I и расстояния r_1 и r_2 от проводов до точки A

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}; \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}.$$

Подставляя выражения B_1 и B_2 в формулу (1) и вынося $\frac{\mu_0 I}{2\pi}$ за знак корня, получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_1 r_2} \cos \alpha}. \quad (2)$$

Вычислим $\cos \alpha$. Заметив, что $\alpha = \angle DAC$ (как углы с соответственно перпендикулярными сторонами), по теореме косинусов запишем

$$d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \alpha, \quad \text{где } d \text{ — расстояние между проводами.}$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1 r_2}.$$

После подстановки числовых значений найдем

$$\cos \alpha = \frac{5^2 + 12^2 - 10^2}{2 \cdot 5 \cdot 12} = \frac{23}{40}.$$

Подставляя в формулу (2) значения α , r_1 , r_2 и $\cos \alpha$, определяем искомую индукцию:

$$B = 3,08 \cdot 10^{-4} \text{ Тл.}$$

Пример 3. По проводу, согнутому в вид квадрата со стороной $a = 10$ см, течет ток силой $I = 100$ А. Найти магнитную индукцию \vec{B} в точке пересечения диагоналей квадрата

Решение. Расположим квадратный виток в плоскости чертежа (рис. 25). Согласно принципу суперпозиции магнитных полей магнитная индукция \vec{B} поля квадратного витка будет равна геометрической сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждой стороной квадрата в отдельности:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4. \quad (1)$$

В точке O пересечения диагоналей квадрата все векторы индукции будут направлены перпендикулярно плоскости витка «к нам». Кроме того, из соображения симметрии следует, что абсолютные значения этих векторов одинаковы: $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Это позволяет векторное равенство (1) заменить скалярным равенством

$$B = 4B_1. \quad (2)$$

Магнитная индукция B_1 поля, создаваемого отрезком прямолинейного провода с током, выражается формулой

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2).$$

Учитывая, что $\alpha_2 = \pi - \alpha_1$ и $\cos \alpha_2 = -\cos \alpha_1$ (рис. 25), формулу (3) можно переписать в виде

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} \cos \alpha_1.$$

Подставив это выражение B_1 в формулу (2), найдем

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi r_0} \cos \alpha_1.$$

Заметив что $r_0 = \frac{a}{2}$ и $\cos \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (так как $\alpha_1 = \frac{\pi}{4}$), получим

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$

Подставим в эту формулу числовые значения физических величин и произведем вычисления:

$$B = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^2}{\pi \cdot 10^{-2}} \text{ Тл} = 1,13 \cdot 10^{-3} \text{ Тл} = 1,13 \text{ мТл}.$$

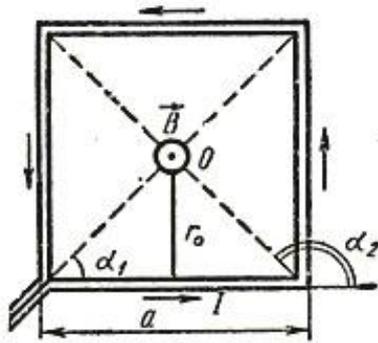


Рис.25

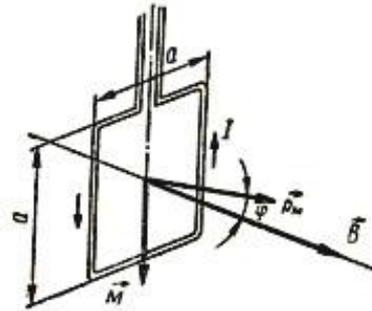


Рис.26

Пример 4. Плоский квадратный контур со стороной $a = 10$ см, по которому течет ток $I = 100$ А, свободно установился в однородном магнитном поле ($B = 1$ Тл). Определить работу A , совершаемую внешними силами при повороте контура относительно оси, проходящей через середину его противоположных сторон, на угол: 1) $\varphi_1 = 90^\circ$; 2) $\varphi_2 = 3^\circ$. При повороте контура сила тока в нем поддерживается неизменной.

Решение. Как известно, на контур с током в магнитном поле действует момент сил (рис. 26)

$$M = p_m B \sin \varphi, \quad (1)$$

где p_m — магнитный момент контура; B — магнитная индукция; φ — угол между вектором \vec{p}_m , направленным по нормали к контуру, и вектором \vec{B} .

По условию задачи, в начальном положении контур свободно установился в магнитном поле. При этом момент сил равен нулю ($M = 0$), а значит, $\varphi = 0$, т. е. вектора \vec{p}_m и \vec{B} совпадают по направлению.

Если внешние силы выведут контур из положения равновесия, то возникший момент сил, определяемый формулой (1), будет стремиться возратить контур в исходное положение. Против этого момента и будет совершаться работа внешними силами. Так как момент сил переменный (зависит от угла поворота φ), то для подсчета работы применим формулу работы в дифференциальной форме:

$$dA = M d\varphi.$$

Подставив сюда выражение M по формуле (1) и учтя, что $p_m = IS = Ia^2$, где I — сила тока в контуре; $S = a^2$ — площадь контура, получим

$$5. \quad dA = IBa^2 \sin \varphi d\varphi.$$

Взяв интеграл от этого выражения, найдем работу при повороте на конечный угол:

$$A = IBa^2 \int_0^\varphi \sin \varphi d\varphi. \quad (2)$$

1. Работа при повороте на угол $\varphi_1 = 90^\circ$

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi = IBa^2 (-\cos \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = IBa^2. \quad (3)$$

Выразим числовые значения величин в единицах СИ: $I = 100$ А; $B = 1$ Тл; $a = 10$ см = 0,1 м и подставим в (4):

$$A_1 = 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \text{ Дж} = 1 \text{ Дж}$$

2. Работа при повороте на угол $\varphi_2 = 3^\circ$. В этом случае, учитывая, что угол φ_2 мал, заменим в выражении (2) $\sin \varphi \approx \varphi$:

$$A_1 = IBa^2 \int_0^{\varphi_2} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} IBa^2 \varphi_2^2.$$

Выразим угол φ_2 в радианах. После подстановки числовых значений величин в (4) найдем

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 1 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,0523)^2 \text{ Дж} = 1,37 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 1,37 \text{ мДж}.$$

Отметим, что задача могла быть решена и другим способом. Известно, что работа внешних сил по перемещению контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока через контур:

$$A = -I \Delta \Phi = I (\Phi_1 - \Phi_2),$$

где Φ_1 — магнитный поток, пронизывающий контур до перемещения; Φ_2 — то же, после перемещения.

В случае $\varphi_2 = 90^\circ$ $\Phi_1 = BS$; $\Phi_2 = 0$. Следовательно,

$$A = IBS = IBa^2,$$

что совпадает с полученным выше результатом (3).

Пример 5. Электрон, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U = 400$ В, попал в однородное магнитное поле напряженностью $H = 10^3$ А/м. Определить радиус R кривизны траектории и частоту обращения электрона в магнитном поле. Вектор скорости перпендикулярен линиям поля.

Решение. Радиус кривизны траектории электрона определим, исходя из следующих соображений: на движущийся в магнитном поле электрон действует сила Лоренца \vec{F}_l (действием силы тяжести можно пренебречь). Сила Лоренца перпендикулярна вектору скорости и, следовательно, сообщает электрону нормальное ускорение:

$$F_l = ma_n,$$

или

$$e\upsilon B \sin \alpha = \frac{m\upsilon^2}{R}, \quad (1)$$

где e – заряд электрона; υ – скорость электрона; B – магнитная индукция; m – масса электрона; R – радиус кривизны траектории; α – угол между направлением вектора скорости \vec{v} и вектором \vec{B} (в данном случае $\vec{v} \perp \vec{B}$ и $\alpha = 90^\circ$, $\sin \alpha = 1$).

Из формулы (1) найдем

$$R = \frac{m\upsilon}{eB}. \quad (2)$$

Входящий в равенство (2) импульс $m\upsilon$ может быть выражен через кинетическую энергию T электрона:

$$m\upsilon = \sqrt{2mT}. \quad (3)$$

Но кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U , определяется равенством

$$T = eU.$$

Подставив это выражение T в формулу (3), получим

$$m\upsilon = \sqrt{2meU}.$$

Магнитная индукция B может быть выражена через напряженность H магнитного поля в вакууме соотношением

$$B = \mu_0 H,$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

Подставив найденные выражения B и $m\upsilon$ в формулу (2), определим

$$R = \frac{\sqrt{2meU}}{\mu_0 e H}. \quad (4)$$

Выразим все величины, входящие в формулу (4), в единицах СИ: $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг (из справочной табл. 17); $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл; $U = 400$ В; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Г/м; $H = 10^3$ А/м. Подставим эти значения в формулу (4) и произведем вычисления:

$$R = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 400}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 10^3}} \text{ м} = 5,37 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Для определения частоты обращения n воспользуемся формулой, связывающей частоту со скоростью и радиусом:

$$n = \frac{\upsilon}{2\pi R}. \quad (5)$$

Подставив в формулу (5) выражение (2) для радиуса кривизны, получим

$$n = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e}{m} B,$$

или

$$n = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{e}{m} H.$$

Все величины, входящие в эту формулу, ранее были выражены в единицах СИ. Подставим их и произведем вычисления:

$$n = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19}}{2 \cdot 3,14 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31}} \cdot 10^3 \text{ с}^{-1} = 3,52 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

Пример 6. В однородном магнитном поле ($B = 0,1$ Тл) равномерно с частотой $n = 10$ об/с вращается рамка, содержащая $N = 1000$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 150$ см². Определить мгновенное значение ЭДС индукции ε_i , соответствующее углу поворота рамки в 30° .

Решение. Мгновенное значение ЭДС индукции ε_i определяется основным уравнением электромагнитной индукции Фарадея – Максвелла

$$\varepsilon_i = \frac{d\Psi}{dt}, \quad (1)$$

где Ψ – потокосцепление.

Потокосцепление Ψ связано с магнитным потоком Φ и числом N витков плотно прилегающих друг к другу соотношением

$$\Psi = N\Phi.$$

Подставляя выражения Ψ в формулу (1), получим

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (2)$$

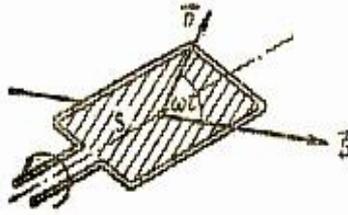


Рис.27

При вращении рамки (рис. 27) магнитный поток Φ , пронизывающий рамку в момент времени t , изменяется по закону

$$\Phi = BS \cos \omega t,$$

где B – магнитная индукция; S – площадь рамки; ω – круговая (или циклическая) частота.

Подставив в формулу (2) выражение Φ и продифференцировав по времени, найдем мгновенное значение ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = NBS\omega \sin \omega t. \quad (3)$$

Круговая частота связана с частотой вращения n соотношением

$$\omega = 2\pi n.$$

Подставляя значение ω в формулу (3), получим

$$\varepsilon_i = 2\pi n NBS \sin \omega t. \quad (4)$$

Выразим физические величины, входящие в эту формулу, в единицах СИ: $n = 10 \text{ с}^{-1}$; $N = 10^3$; $B = 0,1 \text{ Тл}$; $S = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}^2$;

$\omega t = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ и, подставив их в формулу (4), произведем вычисления:

$$\varepsilon_i = 2 \cdot 3,14 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \cdot 0,5 \text{ В} = 47,1 \text{ В}.$$

Пример 7. Соленоид с сердечником из немагнитного материала содержит $N = 1200$ витков провода, плотно прилегающих друг к другу. При силе тока $I = 4 \text{ А}$ магнитный поток Φ равен 6 мкВб . Определить индуктивность L соленоида и энергию W магнитного поля соленоида.

Решение. Индуктивность L связана с потокоцеплением Ψ силой тока I соотношением

$$\Psi = LI. \quad (1)$$

Потокоцепление, в свою очередь, может быть выражено через поток Φ и число витков N (при условии, что витки плотно прилегают друг к другу) соотношением

$$\Psi = N\Phi. \quad (2)$$

Из выражения (1) и (2) находим интересующую нас индуктивность соленоида:

$$L = \frac{N\Phi}{I}. \quad (3)$$

Выразим все величины в единицах СИ: $N = 1200$; $\Phi = 6 \cdot 10^{-6} \text{ Вб}$; $I = 4 \text{ А}$. Подставим их в формулу (3) и произведем вычисления:

$$L = \frac{1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6}}{4} \text{ Гн} = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} = 1,8 \text{ мГн}.$$

Энергия W магнитного поля соленоида с индуктивностью L при силе тока I , протекающего по его обмотке, может быть вычислена по формуле

$$W = \frac{1}{2} LI^2.$$

Подставим в эту формулу полученное ранее выражение индуктивности (3):

$$6. \quad W = \frac{1}{2} N\Phi I$$

и произведем вычисления:

$$W = \frac{1}{2} 1,2 \cdot 10^3 \cdot 6 \cdot 10^{-6} \cdot 4 \text{ Дж} = 1,44 \cdot 10^{-2} \text{ Дж} = 14,4 \text{ мДж}.$$

Оптика

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ И ФОРМУЛЫ

Геометрическая оптика

• Фокусное расстояние сферического зеркала

$$f = R/2,$$

где R — радиус кривизны зеркала.

Оптическая сила сферического зеркала

$\Phi = 1/f$. Формула сферического зеркала

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a и b — расстояния от полюса зеркала соответственно до предмета и изображения.

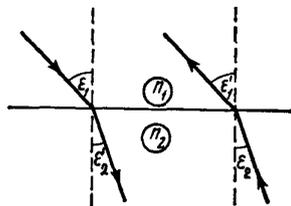
Если изображение предмета мнимое, то величина b берется со знаком минус.

Если фокус сферического зеркала мнимый (зеркало выпуклое), то величина f берется со знаком минус.

• Закон преломления света

$$\frac{\sin \varepsilon_1}{\sin \varepsilon_2} = n_{21},$$

где ε_1 — угол падения; ε_2 — угол преломления; $n_{21} = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления второй среды относительно первой; n_1 и n_2 — абсолютные показатели преломления соответственно первой и второй сред.



Нижние индексы в обозначениях углов указывают, в какой среде (первой или второй) идет луч. Если луч переходит из второй среды в первую, падая на поверхность раздела под углом $\varepsilon_2 = \varepsilon_2'$, то по принципу обратимости световых лучей угол преломления ε_1' будет равен углу ε_1 (рис. 28.1).

• Предельный угол полного отражения при переходе света из среды более оптически плотной в среду менее оптически плотную

$$\varepsilon_{np} = \arcsin(n_2/n_1) \quad (n_2 < n_1)$$

• Оптическая сила тонкой линзы
$$\Phi = \frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_{cp}} - 1\right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$

где f — фокусное расстояние линзы; n_L — абсолютный показатель преломления вещества линзы; n_{cp} — абсолютный показатель преломления окружающей среды (одинаковой с обеих сторон линзы).

В приведенной формуле радиусы выпуклых поверхностей (R_1 и R_2) берутся со знаком плюс, вогнутых — со знаком минус.

• Оптическая сила двух тонких сложенных вплотную линз $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$.

• Формула тонкой линзы
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где a — расстояние от оптического центра линзы до предмета; b — расстояние от оптического центра линзы до изображения.

Если фокус мнимый (линза рассеивающая), то величина f отрицательна.

Если изображение мнимое, то величина b отрицательна.

• Угловое увеличение лупы $\Gamma = D/f$,

где D — расстояние наилучшего зрения ($D = 25$ см).

• Угловое увеличение телескопа $\Gamma = f_{об}/f_{ок}$,

где $f_{об}$ и $f_{ок}$ — фокусные расстояния соответственно объектива и окуляра.

Расстояние от объектива до окуляра телескопа $L = f_{об} + f_{ок}$

Эти формулы можно применять только в том случае, если в телескоп наблюдают весьма удаленные предметы.

• Угловое увеличение микроскопа $L = \delta D / (f_{об} f_{ок})$,

где δ — расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра.

Расстояние от объектива до окуляра микроскопа $L = f_{об} + \delta + f_{ок}$

ФОТОМЕТРИЯ

• Световой поток Φ_v испускаемый изотропным точечным источником света в пределах телесного угла ω , в вершине которого находится источник, выражается формулой $\Phi_v = I\omega$,

где I — сила света источника; $\omega = 2\pi(1 - \cos \mathcal{G})$; \mathcal{G} — угол между осью конуса и его образующей.

• Полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником света, $\Phi_0 = 4\pi I$.

• Освещенность поверхности определяется соотношением $E_v = \Phi/S$,

где S — площадь поверхности, по которой равномерно распределяется падающий на нее световой поток Φ_v .

Освещенность, создаваемая изотропным точечным источником света, $E_v = \frac{1}{r^2} \cos \varepsilon$,

где r — расстояние от поверхности до источника света; ε — угол падения лучей.

• Сила света любого элемента поверхности косинусного излучателя $I = I_0 \cos \varphi$,

где φ — угол между нормалью к элементу поверхности и направлением наблюдения; I_0 — сила света элемента поверхности по направлению нормали к этому элементу.

• Яркость светящейся поверхности $L_v = I/\sigma$,

где I — сила света в направлении наблюдения; σ — площадь проекции светящейся поверхности на плоскость, перпендикулярную этому направлению.

• Светимость определяется соотношением $M_v = \Phi_v/S$,

где Φ_v — световой поток, испускаемый поверхностью; S — площадь этой поверхности.

Светимость косинусных излучателей $M_v = \pi L_v$.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

- Скорость света в среде $v=c/n$,

где c — скорость света в вакууме; n — абсолютный показатель преломления среды.

- Оптическая длина пути световой волны $L=nl$,

где l — геометрическая длина пути световой волны в среде с показателем преломления n .

3. Оптическая разность хода двух световых волн $\Delta=L_1-L_2$.

- Оптическая разность хода световых волн, отраженных от верхней и нижней поверхностей тонкой плоскопараллельной пластинки или пленки, находящейся в воздухе (рис. 30.1, а),

$\Delta=2d\sqrt{n^2-\sin^2\varepsilon_1}+\lambda/2$, или $\Delta=2dn\cos\varepsilon_2'+\lambda/2$, где d — толщина пластинки (пленки); ε_1 — угол падения; ε_2' — угол преломления.

Второе слагаемое в этих формулах учитывает изменение оптической длины пути световой волны на $\lambda/2$ при отражении ее от среды оптически более плотной.

В проходящем свете (рис. 30.1, б) отражение световой волны происходит от среды оптически менее плотной и дополнительной разности хода световых лучей не возникает.

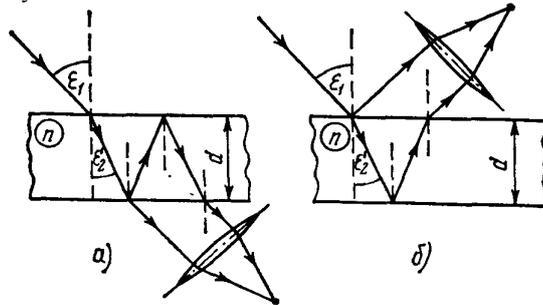


Рис. 30.1

- Связь разности фаз $\Delta\varphi$ колебаний с оптической разностью хода волн $\Delta\varphi=2\pi\Delta/\lambda$.

- Условие максимумов интенсивности света при интерференции $\Delta=\pm k\lambda$ ($k=0,1,2,3, \dots$).

- Условие минимумов интенсивности света при интерференции $\Delta=\pm(2k+1)(\lambda/2)$.

- Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных в проходящем) $r_k=\sqrt{(2k-1)R(\lambda/2)}$.

где k — номер кольца ($k=1, 2, 3, \dots$); R — радиус кривизны поверхности линзы, соприкасающейся с плоскопараллельной стеклянной пластинкой.

Радиусы темных колец в отраженном свете (или светлых в проходящем) $r_k=\sqrt{kR\lambda}$.

ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

- Радиус k -ой. зоны Френеля:

для сферической волны $\rho_k=\sqrt{\frac{ab}{a+b}k\lambda}$,

где a — расстояние диафрагмы с круглым отверстием от точечного источника света; b — расстояние диафрагмы от экрана, на котором ведется наблюдение дифракционной картины; k — номер зоны Френеля; λ — длина волны;

для плоской волны $\rho_k=\sqrt{bk\lambda}$.

- Дифракция света на одной щели при нормальном падении лучей. Условие минимумов интенсивности света

$$a \sin \varphi = \pm 2k \frac{\lambda}{2} = \pm k\lambda, \quad k=1,2,3,\dots,$$

где a — ширина щели; φ — угол дифракции; k — номер минимума; λ — длина волны.

Условие максимумов интенсивности света $a \sin \varphi' = (2k+1) \frac{\lambda}{2}, \quad k=1, 2, 3, \dots,$

где φ' — приближенное значение угла дифракции.

- Дифракция света на дифракционной решетке при нормальном падении лучей. Условие главных максимумов интенсивности $d \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad k=0,1,2,3,\dots,$

где d — период (постоянная) решетки; k — номер главного максимума; φ — угол между нормалью к поверхности решетки и направлением дифрагированных волн.

- Разрешающая сила дифракционной решетки $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$,

где $\Delta\lambda$ — наименьшая разность длин волн двух соседних спектральных линий (λ и $\lambda+\Delta\lambda$), при которой эти линии могут быть видны раздельно в спектре, полученном посредством данной решетки; N — число штрихов решетки; k — порядковый номер дифракционного максимума.

- Угловая дисперсия дифракционной решетки $D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{k}{d \cos \varphi}$,

линейная дисперсия дифракционной решетки $D_l = \frac{\delta l}{\delta\lambda}$.

Для малых углов дифракции $D_l \approx fD_\varphi \approx f \frac{k}{d}$,

где f — главное фокусное расстояние линзы, собирающей на экране дифрагирующие волны.

- Разрешающая сила объектива телескопа $R = \frac{1}{\beta} = \frac{D}{1,22\lambda}$,

где β — наименьшее угловое расстояние между двумя светлыми точками, при котором изображения этих точек в фокальной плоскости объектива могут быть видны раздельно; D — диаметр объектива; λ — длина волны.

- формула Вульфа — Брэгга $2d \sin \vartheta = k\lambda$,

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; ϑ — угол скольжения (угол между направлением пучка параллельных лучей, падающих на кристалл, и гранью кристалла), определяющий направление, в котором имеет место зеркальное отражение лучей (дифракционный максимум).

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Основные формулы

- Закон Брюстера $\operatorname{tg} \varepsilon_B = n_{21}$,

где ε_B — угол падения, при котором отраженная световая волна полностью поляризована; n_{21} — относительный показатель преломления.

- Закон Малюса

$$I = I_0 \cos^2 \alpha,$$

где I — интенсивность плоскополяризованного света, прошедшего через анализатор; I_0 — интенсивность плоскополяризованного света, падающего на анализатор; α — угол между направлением колебаний светового вектора волны, падающей на анализатор, и плоскостью пропускания анализатора.

- Степень поляризации света

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}},$$

где I_{\max} и I_{\min} — максимальная и минимальная интенсивности частично поляризованного света, пропускаемого анализатором.

- Угол поворота φ плоскости поляризации оптически активными веществами определяется соотношениями:

а) в твердых телах $\varphi = ad$, где a — постоянная вращения; d — длина пути, пройденного светом в оптически активном веществе;

б) в чистых жидкостях $\varphi = [\alpha] \rho d$, где $[\alpha]$ — удельное вращение; ρ — плотность жидкости;

в) в растворах $\varphi = [\alpha] Cd$, где C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе.

ОПТИКА ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Основные формулы

- Эффект Доплера в релятивистском случае

$$v = v_0 \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \cos \vartheta}$$

где v — частота электромагнитного излучения, воспринимаемого наблюдателем; v_0 — собственная частота электромагнитного излучения, испускаемого неподвижным источником; $\beta = v/c$ — скорость источника электромагнитного излучения относительно наблюдателя; c — скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме; ϑ — угол между вектором v и направлением наблюдения, измеренный в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

При движении источника вдоль прямой, соединяющей наблюдателя и источник, возможны два случая:

а) источник удаляется от наблюдателя ($\vartheta = 0$) $v = v_0 \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$

б) источник приближается к наблюдателю ($\vartheta = \pi$) $v = v_0 \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}$

- Эффект Доплера в нерелятивистском случае $\frac{\Delta v}{v} = \frac{v}{c} \cos \vartheta$

где Δv — изменение частоты ($\Delta v = v - v_0$).

КВАНТОВООПТИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ. ФИЗИКА АТОМА ЗАКОНЫ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

- Закон Стефана — Больцмана

$$M_e = \sigma T^4$$

где M_e — энергетическая светимость черного тела; T — термодинамическая температура; σ — постоянная Стефана — Больцмана

$$[\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)].$$

- Энергетическая светимость серого тела

$$M_e = \varepsilon \sigma T^4$$

где ε — коэффициент теплового излучения (степень черноты) серого тела.

- Закон смещения Вина

$$\lambda_m = b/T,$$

где λ_m — длина волны, на которую приходится максимум энергии излучения; b — постоянная закона смещения Вина ($b = 2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$).

- Формула Планка

$$M_{\lambda, T} = \frac{2\pi h c^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{hc/(\lambda kT)} - 1}$$

$$M_{\omega, T} = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^2} \frac{1}{e^{\hbar\omega/(kT)} - 1}$$

где $M_{\lambda, T}$, $M_{\omega, T}$ — спектральные плотности энергетической светимости черного тела; λ — длина волны; ω — круговая частота; c — скорость света в вакууме; k — постоянная Больцмана; T — термодинамическая температура; h — постоянная Планка; $\hbar = h/(2\pi)$ — постоянная Планка, деленная на 2π .

- Зависимость максимальной спектральной плотности энергетической светимости от температуры

$$(M_{\lambda, T})_{\max} = CT^5,$$

где C — постоянная [$C = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/м}^3 \cdot \text{К}^5$].

ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ЭФФЕКТ.

- Формула Эйнштейна:

а) в общем случае

$$\varepsilon = h\nu = A + T_{\max}, \text{ или } \hbar\omega = A + T_{\max},$$

где $\varepsilon = h\nu = \hbar\omega$ — энергия фотона, падающего на поверхность металла; A — работа выхода электрона из металла; T_{\max} — максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона;

б) в случае, если энергия фотона много больше работы выхода ($h\nu \gg A$),

$$h\nu = T_{\max}, \text{ или } \hbar\omega = T_{\max}.$$

Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в двух случаях (нерелятивистском и релятивистском) выражается различными формулами:

а) если фотоэффект вызван фотоном, имеющим незначительную энергию ($h\nu = \hbar\omega = 5 \text{ кэВ}$), то

$$T_{\max} = \frac{1}{2} m_0 v_{\max}^2,$$

где m_0 — масса покоя электрона;

б) если фотоэффект вызван фотоном, обладающим большой энергией ($h\nu = \hbar\omega \gg 5 \text{ кэВ}$), то

$$T_{\max} = (m - m_0)c^2, \text{ или}$$

$$T_{\max} = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1 \right)$$

где $\beta = v_{\max}/c$ — масса релятивистского электрона.

- Красная граница фотоэффекта

$$\lambda_0 = hc/A \text{ или } \lambda_0 = 2\pi \hbar c/A; \nu_0 = A/h \text{ или } \omega_0 = A/\hbar,$$

где λ_0 — максимальная длина волн излучений (ν_0 и ω_0 — минимальные соответственно частота и круговая частота), при которых еще возможен фотоэффект.

ДАВЛЕНИЕ СВЕТА. ФОТОНЫ.

- Давление, производимое светом при нормальном падении,

$$p = (E_e/c) \cdot (1 + \rho), \text{ или } p = \omega(1 + \rho),$$

где E_e — облученность поверхности; c — скорость электромагнитного излучения в вакууме; ω — объемная плотность энергии излучения; ρ — коэффициент отражения.

- Энергия фотона

$$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda, \text{ или } \varepsilon = \hbar\omega,$$

где h — постоянная Планка; $\hbar = h/(2\pi)$; ν — частота света; ω — круговая частота; λ — длина волны.

- Масса и импульс фотона выражаются соответственно формулами

$$m = \varepsilon/c^2 = h/(c\lambda); p = mc = h/\lambda.$$

ЭФФЕКТ КОМПТОНА.

- Изменение длины волны $\Delta\lambda$, фотона при рассеянии его на электроне на угол θ

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = [(2\pi \hbar)/(mc)] \cdot (1 - \cos \theta), \text{ или } \Delta\lambda = 2 \cdot [(2\pi \hbar)/(mc)] \cdot \sin^2(\theta/2)$$

где m — масса электрона отдачи; λ и λ' — длины волн»

- Комптоновская длина волны

$$\lambda_c = 2\pi \hbar/(mc).$$

(При рассеянии фотона на электроне $\lambda_c = 2,436 \text{ пм.}$)

АТОМ ВОДОРОДА ПО ТЕОРИИ БОРА.

- Момент импульса электрона на стационарных орбитах

$$L = mvr = n\hbar \quad (n=1, 2, 3, \dots),$$

$$E_n = -\frac{me^4}{32\pi^2 \varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2}$$

где m — масса электрона; r — радиус орбиты; v — скорость электрона на орбите; n — главное квантовое число; \hbar — постоянная Планка.

- Энергия электрона, находящегося на n -й орбите,

где ε_0 — электрическая постоянная.

• Серийная формула, определяющая длину волны λ или частоту ν света, излучаемого или поглощаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое,

$$v = R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad \frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

где R' и R — постоянная Ридберга ($R=1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$; $R=cR'=3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$); n_1 и n_2 — целые числа; n_1 — номер серии спектральных линий ($n_1=1$ — серия Лаймана, $n_2=2$ — серия Бальмера, $n_1=3$ — серия Пашена и т. д.). Для данной серии $n_2=n_1+1$, n_1+2 , n_1+3 и т. д.

• Энергия фотона, испускаемого атомом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое,

$$\varepsilon = E_i \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

где E_i — энергия ионизации * водорода: $E_i=2\pi\hbar R=13,6 \text{ эВ}$.

РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.

• Коротковолновая граница λ_{\min} сплошного рентгеновского спектра

$$\lambda_{\min} = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U}$$

где e — заряд электрона; U — разность потенциалов, приложенная к рентгеновской трубке; \hbar — постоянная Планка.

• Закон Мозли:

а) в общем случае

$$\omega = CR(Z-\sigma)^2$$

где ω — частота линий рентгеновского спектра; Z — атомный номер элемента, излучающего этот спектр; R — постоянная Ридберга ($R=2,07 \cdot 10^{16} \text{ с}^{-1}$); σ — постоянная экранирования; C — постоянная;

б) для K_α -линий ($\sigma=1$, $C=3/4$)

$$\omega_{K\alpha} = \frac{3}{4} R(Z-1)^2 \text{ или } 1/\lambda_{K\alpha} = \frac{3}{4} R'(Z-1)^2,$$

где R' — штрихованная постоянная Ридберга ($R'=1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$);

$1/\lambda = \omega/(2\pi c)$ — волновое число *.

• Энергия фотона K_α -линии рентгеновского излучения

$$\varepsilon_{K\alpha} = \frac{3}{4} E_i(Z-1)^2,$$

где E_i — энергия ионизации атома водорода.

ФИЗИКА АТОМНОГО ЯДРА И ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ СТРОЕНИЕ АТОМНЫХ ЯДЕР

• Ядро обозначается тем же символом, что и нейтральный атом: ${}^A_Z X$,

где X — символ химического элемента; Z — зарядовое число (атомный номер; число протонов в ядре); A — массовое число (число нуклонов в ядре). Число N нейтронов в ядре равно разности $A-Z$.

• Радиус ядра определяется соотношением

$$r = r_0 A^{1/3}$$

где r_0 — коэффициент пропорциональности, который можно считать для всех ядер постоянным и равным $1,4 \cdot 10^{-15} \text{ м}$.

РАДИОАКТИВНОСТЬ.

• Основной закон радиоактивного распада $N=N_0 e^{-\lambda t}$

где N — число нераспавшихся атомов в момент времени t ; N_0 — число нераспавшихся атомов в момент, принятый за начальный (при $t=0$); e — основание натуральных логарифмов; λ — постоянная радиоактивного распада.

• Период полураспада $T_{1/2}$ — промежуток времени, за который число нераспавшихся атомов уменьшается в два раза. Период полураспада связан с постоянной распада соотношением

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0,693 / \lambda.$$

• Число атомов, распавшихся за время t ,

$$\Delta N = N_0 - N = N_0 (1 - e^{-\lambda t}).$$

Если промежуток времени $\Delta t \ll T_{1/2}$, то для определения числа распавшихся атомов можно применять приближенную формулу

$$\Delta N \approx \lambda N \Delta t$$

Среднее время жизни τ радиоактивного ядра — промежуток времени, за который число нераспавшихся ядер уменьшается в e раз:

$$\tau = 1/\lambda$$

• Число атомов, содержащихся в радиоактивном изотопе,

$$N = (m/M) \cdot N_A$$

где m — масса изотопа; M — его молярная масса; N_A — постоянная Авогадро.

• Активность A нуклида в радиоактивном источнике (активность изотопа) есть величина, равная отношению числа dN ядер, распавшихся в изотопе, к промежутку времени dt , за которое произошел распад. Активность определяется по формуле

$$A = -dN/dt = \lambda N,$$

или после замены N по основному закону радиоактивного распада

$$A = \lambda N_0 e^{-\lambda t}$$

Активность изотопа в начальный момент времени ($t=0$)

$$A_0 = \lambda N_0.$$

Активность изотопа изменяется со временем по тому же закону, что и число нераспавшихся ядер:

$$A = A_0 e^{-\lambda t}$$

• Массовая активность a радиоактивного источника есть величина, равная отношению его активности A к массе m этого источника, т. е.

$$a = A/m.$$

• Если имеется смесь ряда радиоактивных изотопов, образующихся один из другого, и если постоянная распада λ первого члена ряда много меньше постоянных всех остальных членов ряда, то в смеси устанавливается состояние радиоактивного равновесия, при котором активности всех членов ряда равны между собой:

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_k N_k.$$

ДЕФЕКТ МАССЫ И ЭНЕРГИЯ СВЯЗИ АТОМНЫХ ЯДЕР

• Согласно релятивистской механике, масса покоя m устойчивой системы взаимосвязанных частиц меньше суммы масс покоя $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ тех же частиц, взятых в свободном состоянии.

Разность

$$\Delta m = (m_1 + m_2 + \dots + m_k) - m \quad (1)$$

называется дефектом массы системы частиц.

• Энергия связи прямо пропорциональна дефекту массы системы частиц:

$$E_{св} = c^2 \Delta m,$$

где c — скорость света в вакууме ($c^2 = 8,987 \cdot 10^{16} \text{ м}^2/\text{с}^2 = 8,987 \cdot 10^{16} \text{ Дж/кг}$).

Если энергия выражена в мегаэлектрон-вольтах, а масса в атомных единицах, то

$$c^2 = 931,4 \text{ МэВ/а. е. м.}$$

• Дефект массы Δm атомного ядра есть разность между суммой масс свободных протонов и нейтронов и массой образовавшегося из них ядра:

$$\Delta m = (Z m_p + N m_n) - m_{я},$$

где Z — зарядовое число (число протонов в ядре); m_p и m_n — массы протона и нейтрона соответственно; $m_{я}$ — масса ядра.

Если учесть, что

$$m_{я} = m_{\alpha} - Z m_e; \quad m_p + m_e = m_{\text{H}}; \quad N = (A - Z),$$

то формулу дефекта массы ядра можно представить в виде

$$\Delta m = Z m_{\text{H}} + (A - Z) m_n - m_{я},$$

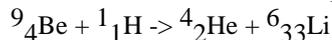
где A — массовое число (число нуклонов в ядре).

• Удельная энергия связи (энергия связи на нуклон)

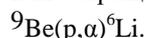
$$E_{уд} = E_{св} / A.$$

ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ.

• Символическая запись ядерной реакции может быть дана или в развернутом виде, например



или сокращенно



При сокращенной записи порядковый номер атома не пишут, так как он определяется химическим символом атома. В скобках на первом месте ставят обозначение бомбардирующей частицы, на втором — частицы, вылетающей из составного ядра, и за скобками — химический символ ядра-продукта.

Для обозначения частиц приняты следующие символы: p — протон, n — нейтрон, d — дейтрон, t — тритон, α — альфа-частица, γ — гамма-фотон.

• Законы сохранения:

а) числа нуклонов $A_1 + A_2 = A_3 + A_4$;

б) заряда $Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4$

в) релятивистской полной энергии $E_1 + E_2 = E_3 + E_4$

г) импульса $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4$.

Если общее число ядер и частиц, образовавшихся в результате реакции, больше двух, то запись соответственно дополняется.

• Энергия ядерной реакции

$$Q = c^2 [(m_1 + m_2) - (m_3 + m_4)],$$

где m_1 и m_2 — массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; $m_3 + m_4$ — сумма масс покоя ядер продуктов реакции.

Если $m_1 + m_2 > m_3 + m_4$, то энергия освобождается, энергетический эффект положителен, реакция экзотермическая.

Если $m_1 + m_2 < m_3 + m_4$ то энергия поглощается, энергетический эффект отрицателен, реакция эндотермическая.

Энергия ядерной реакции может быть записана также в виде

$$Q = (T_1 + T_2) - (T_3 + T_4),$$

где T_1 и T_2 — кинетические энергии соответственно ядра-мишени и бомбардирующей частицы; T_3 и T_4 — кинетические энергии вылетающей частицы и ядра — продукта реакции.

При экзотермической реакции $T_3 + T_4 > T_1 + T_2$ при эндотермической реакции $T_3 + T_4 < T_1 + T_2$.

ЭЛЕМЕНТЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА МИКРОЧАСТИЦ

• Формула де Бройля, выражающая связь длины волн с импульсом p движущейся частицы, для двух случаев:

а) в классическом приближении ($v \ll c$; $p = m_0 v$)

$$\lambda = 2\pi\hbar/p$$

б) в релятивистском случае (скорость u частицы сравнима со скоростью c света в вакууме; $p = m_0 v / \sqrt{1 - v^2/c^2}$)

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{m_0 v} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

• Связь длины волны де Бройля с кинетической энергией T частицы:

а) в классическом приближении $\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 T}}$;

б) в релятивистском случае $\lambda = \frac{2\pi\hbar c}{\sqrt{T(T + 2E_0)}}$, где E_0 — энергия

покоя частицы ($E_0 = m_0 c^2$).

• Фазовая скорость волн де Бройля

$$v = \omega/k$$

где ω — круговая частота; k — волновое число ($k = 2\pi/\lambda$).

• Групповая скорость волн де Бройля

$$u = \frac{d\omega}{dk}$$

• Соотношения де Бройля:

$$E = \hbar\omega, p = \hbar k,$$

где E — энергия движущейся частицы; p — импульс частицы; k — волновой вектор;

$$|k| = k = 2\pi/\lambda; \hbar - \text{постоянная Планка } (\hbar = h/(2\pi) = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж}\cdot\text{с}).$$

• Соотношения неопределенностей:

а) для координаты и импульса частицы $\Delta p_x \Delta x \geq \hbar$ где Δp_x — неопределенность проекции импульса частицы на ось x ; Δx — неопределенность ее координаты;

б) для энергии и времени $\Delta E \Delta t \geq \hbar$, где ΔE — неопределенность энергии данного квантового состояния; Δt — время пребывания системы в этом состоянии.

ФИЗИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА ЭЛЕМЕНТЫ КРИСТАЛЛОГРАФИИ

• Молярный объем кристалла

$$V_m = M/\rho,$$

где M — молярная масса вещества; ρ — плотность кристалла. Объем V элементарной ячейки в кристаллах:

а) при кубической сингонии $V = a^3$;

б) при гексагональной сингонии $V = \sqrt{3}a^2 c / 2$. Здесь a и c — параметры решетки.

Если для гексагональной решетки принять теоретическое значение

$$c = \sqrt{8/3}a, \text{ то } V = \sqrt{2}a^3.$$

• Число Z_m элементарных ячеек в одном моле кристалла

$$Z_m = V_m/V, \text{ или } Z_m = kN_A/n,$$

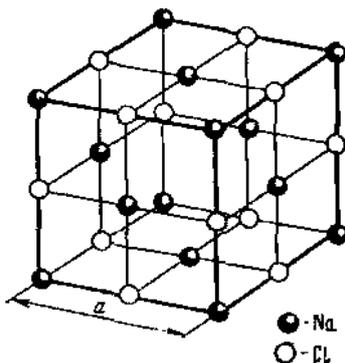


Рис.49.1

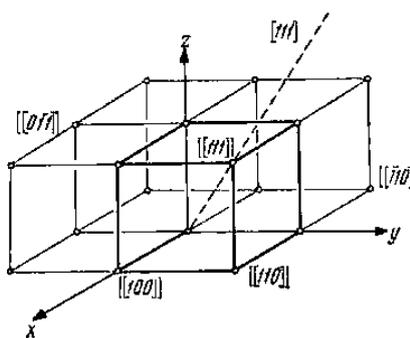


Рис.49.2

где k — число одинаковых атомов в химической формуле соединения (например, в кристалле AgBr число одинаковых атомов Ag или Br в химической формуле соединения равно единице); N_A — постоянная Авогадро; n — число одинаковых атомов, приходящихся на элементарную ячейку. На рис. 49.1 представлена структура NaCl ; аналогичную структуру имеют соединения KBr , AgBr , MnO и др.

Число Z элементарных ячеек в единице объема кристалла

$$Z = Z_m/V_m$$

или в общем случае

$$Z = \rho \frac{k N_A}{n M}$$

для кристалла, состоящего из одинаковых атомов ($k = 1$),

$$Z = \rho \frac{N_A}{nM}$$

• Параметр a кубической решетки

$$a = \sqrt[3]{nM / \rho N_A}$$

Расстояние d между соседними атомами в кубической решетке:

а) в гранецентрированной $d = a / \sqrt{2}$,

б) в объемно центрированной $d = \sqrt{3}a / 2$

• Для обозначения узлов, направлений и плоскостей в решетке вводятся специальные индексы.

Индексы узлов записываются в двойных квадратных скобках $[[mnp]]$. Для отрицательных индексов над буквой ставится знак минус, например \bar{m} (рис. 49.2).

• Индексы направлений записываются в одинарных квадратных скобках $[mnp]$. Индекс направления совпадает с индексом узла, через который проходит прямая, если эта прямая одновременно проходит и через начало координат $[[000]]$ (рис. 49.2).

Индексы направления задают не одну прямую в кристалле, а семейство параллельных прямых. Изменение всех индексов на обратные по знаку $[\bar{m}\bar{n}\bar{p}]$ означает то же самое направление в кристалле.

• Период идентичности вдоль прямой, заданной индексами $[mnp]$, в кубической решетке выражается соотношением

$$l = a\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$$

где a — параметр решетки.

• Угол φ между прямыми $[m_1n_1p_1]$ и $[m_2n_2p_2]$ в кубической решетке выражается формулой

$$\cos \varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

• Индексы плоскости (индексы Миллера) записываются в круглых скобках (hkl) . Изменение всех индексов на обратные $(\bar{h}\bar{k}\bar{l})$ отвечает тому же семейству плоскостей.

Индексы Миллера связаны с минимальными отрезками, отсекаемыми плоскостью на осях координат.

• Для нахождения отрезков следует взять обратные величины индексов Миллера $(1/h; 1/k; 1/l)$ и привести их к наименьшему целому, кратному каждому из полученных чисел. Полученные значения и есть наименьшие отрезки, отсекаемые плоскостью (hkl) на осях координат.

Если известны отрезки, отсекаемые на осях координат, то индексы Миллера находятся аналогичным путем (см. пример 4). Индексы Миллера пропорциональны направляющим косинусам вектора нормали к данной плоскости. Поэтому индексы Миллера для некоторого семейства плоскостей совпадают с индексами направлений нормали к этим плоскостям.

• Угол между плоскостями $(h_1k_1l_1)$ и $(h_2k_2l_2)$ определяется из формулы

$$\cos \varphi = \frac{h_1h_2 + k_1k_2 + l_1l_2}{\sqrt{h_1^2 + k_1^2 + l_1^2} \sqrt{h_2^2 + k_2^2 + l_2^2}}$$

а между прямой $[mnp]$ и плоскостью (hkl) — из формулы

$$\cos \varphi = \frac{hm + kn + lp}{\sqrt{h^2 + k^2 + l^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

Примеры решения задач

Пример 1. На стеклянную призму с преломляющим углом $\theta = 50^\circ$ падает под углом $\varepsilon = 30^\circ$ луч света. Определить угол отклонения σ луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1,56.

Решение. Данную задачу целесообразно решать не в общем виде, как принято, а пооперационно, производя все промежуточные вычисления. В этом случае мы несколько проигрываем в точности расчетов, но выигрываем в наглядности и простоте вычислений. Из рис. 28.2 видно, что угол отклонения

$$\sigma = \gamma + \gamma', \quad (1)$$

углы γ и γ' просто выражаются через углы $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_1', \varepsilon_2'$, которые последовательно и будем вычислять:

1) из закона преломления $n = \sin \varepsilon_1 / \sin \varepsilon_2'$ имеем

$$\varepsilon_2' = \arcsin\left(\frac{\sin \varepsilon_1}{n}\right) = 18,7^\circ;$$

2) из рис. 28.2, следует, что угол падения ε_2 на вторую грань призмы равен

$$\varepsilon_2 = \theta - \varepsilon_2' = 31,3^\circ.$$

Угол ε_2 меньше предельного $\varepsilon_{2\text{пред}} = \arcsin(1/n) = 39,9^\circ$, потому на второй грани луч преломится и выйдет из призмы;

3) так как $\sin \varepsilon_2 / \sin \varepsilon_1' = 1/n$, то $\varepsilon_1' = \arcsin(n \sin \varepsilon_2) = 54,1^\circ$.

Теперь найдем углы γ и γ' :

$$\gamma = \varepsilon_1 - \varepsilon_2' = 11,3^\circ \text{ и}$$

$$\gamma' = \varepsilon_1' - \varepsilon_2 = 22,8^\circ.$$

По формуле (1) находим $\sigma = \gamma + \gamma' = 34,1^\circ$.

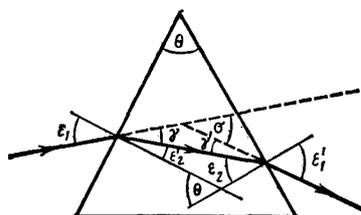


Рис. 28.2

Пример 2. Оптическая система представляет собой тонкую плосковыпуклую стеклянную линзу, выпуклая поверхность которой посеребрена. Определить главное фокусное расстояние f такой системы, если радиус кривизны R сферической поверхности линзы равен 60 см.

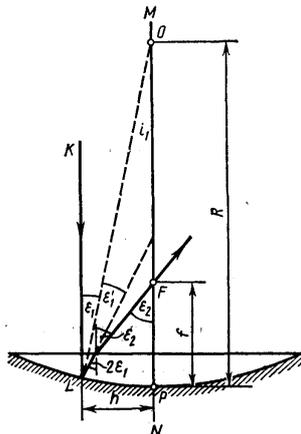


Рис. 28.3

Решение. Пусть на линзу падает парааксиальный луч KL , параллельный главной оптической оси MN линзы (рис. 28.3). Так как луч KL перпендикулярен плоской поверхности линзы, то он проходит ее без преломления.

На сферическую посеребренную поверхность луч падает в точке L под углом ε_1 и отражается от нее под углом $\varepsilon_1' = \varepsilon_1$. Отраженный луч падает на границу плоской поверхности линзы под углом $2\varepsilon_1$ и по выходе из линзы пересекает главную оптическую ось в точке F , образуя с осью угол ε_2 . Длина полученного при этом отрезка FP и равна искомому фокусному расстоянию рассматриваемой оптической системы.

Если учесть, что в силу парааксильности луча KL углы ε_1 и ε_2 малы, а их синусы и тангенсы практически равны самим углам, выраженным в радианах, то из рис. 28.3 следует

$$f = \frac{h}{\varepsilon_2} = \frac{R\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = R \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Входящее в формулу (1) отношение $\varepsilon_1/\varepsilon_2$ углов найдем, пользуясь законом преломления света, который в нашем случае записывается;

в виде $2\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 1/n$, откуда

$$\varepsilon_1/\varepsilon_2 = 1/(2n).$$

Подставив это отношение углов в формулу (1), найдем

$$f = R/(2n).$$

Такой же результат можно получить и из формальных соображений. Так как луч KL последовательно проходит линзу, отражается от вогнутого зеркала и еще раз проходит линзу, то данную оптическую систему можно рассматривать как центрированную систему, состоящую из сложенных вплотную двух плосковыпуклых линз и сферического зеркала. Фокусное расстояние оптической системы может быть найдено по формуле

$$f = 1/\Phi,$$

где Φ — оптическая сила системы.

Как известно, оптическая сила системы равна алгебраической сумме оптических сил отдельных компонентов системы. В нашем случае

$$\Phi = (n-1)\frac{1}{R} + \frac{2}{R} + (n-1)\frac{1}{R} = \frac{2n}{R}, \text{ т. е.}$$

$$f = 1/\Phi = R/(2n),$$

что совпадает с результатом, выраженным формулой (2).

Пример 3. Проектор ближнего освещения дает пучок света в виде усеченного конуса с углом раствора $2\vartheta = 40^\circ$. Световой поток Φ прожектора равен 80 клм. Допуская, что световой поток распределен внутри конуса равномерно, определить силу света I прожектора.

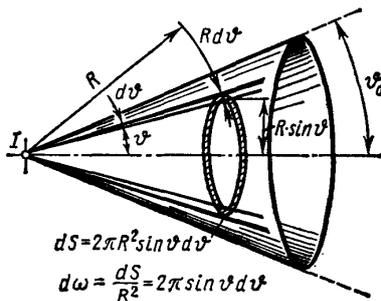


Рис. 29.1

Решение. Сила света I изотропного источника равна отношению светового потока Φ к телесному углу ω , в пределах которого распространяется световой поток, т. е.

$$I = \Phi/\omega.$$

(1)

Выразим телесный угол через угол раствора. Из рис. 29.1 следует, что элементарный телесный угол $d\omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$. Телесный угол, соответствующий углу раствора $2\vartheta_0$ конуса, выразится интегралом:

$$\omega = \int_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta d\vartheta, \text{ или}$$

$$\omega = 2\pi(1 - \cos \vartheta_0) = 4\pi \sin^2(\vartheta_0/2).$$

Подставив выражение ω в формулу (1), получим

$$I = \frac{\Phi}{4\pi \sin^2(\vartheta/2)}. \quad (2)$$

Произведя вычисления по формуле (2), найдем $I = 211$ кд.

Пример 4. Люминесцентная цилиндрическая лампа диаметром $d = 2,5$ см и длиной $l = 40$ см создает на расстоянии $r = 5$ м в направлении, перпендикулярном оси лампы, освещенность $E_v = 2$ лк. Принимая лампу за косинусный излучатель, определить: 1) силу света I в данном направлении; 2) яркость L ; 3) светимость M лампы.

Решение. 1. Большой из двух размеров лампы — длина — в 12 раз меньше расстояния, на котором измерена освещенность.

Следовательно, для вычисления силы света в данном направлении можно принять лампу за точечный источник и применить формулу

$$E = I/r^2, \text{ откуда } I = Er^2.$$

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$I = 25 \text{ кд.}$$

2. Для вычисления яркости применим формулу

$$L = I/\sigma,$$

где σ — площадь проекции протяженного источника света на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения.

В случае цилиндрической люминесцентной лампы проекция имеет форму прямоугольника длиной l и шириной d . Следовательно,

$$L = I/(ld).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$L = 2,5 \text{ кд/м}^2.$$

3. Так как люминесцентную лампу можно считать косинусным излучателем, то ее светимость

$$M = \pi L = 7,9 \text{ клк.}$$

Пример 5. В точку A экрана от источника S_1 монохроматического света длиной волны $\lambda = 0,5 \mu\text{м}$ приходят два луча: непосредственно от источника луч S_1A , перпендикулярный экрану, и луч S_1BA , отраженный в точке B от зеркала, параллельного лучу S_1A (рис. 30.2). Расстояние l_1 экрана от источника равно 1 м, расстояние h от луча S_1A до плоскости зеркала равно 2 мм. Определить: 1) что будет наблюдаться в точке A экрана — усиление или ослабление интенсивности; 2) как изменится интенсивность в точке A , если на пути луча S_1A перпендикулярно ему поместить плоскопараллельную пластинку стекла ($n = 1,55$) толщиной $d = 6 \mu\text{м}$.

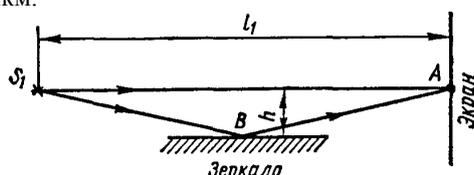


Рис. 30.2

Решение. Построим мнимое изображение S_2 источника S_1 в зеркале (рис. 30.3). Источники S_1 и S_2 являются когерентными, поэтому при сложении волн, приходящих от этих источников на экран, возникает интерференционная картина. Усиление или ослабление интенсивности в той или иной точке экрана зависит от оптической разности хода Δ интерферирующих лучей, другими словами, от числа m полуволн, укладывающихся на оптической разности хода:

$$m = \frac{\Delta}{\lambda/2} \quad (1)$$

Если m — целое четное, то интенсивность будет максимальной; если m — целое нечетное, то интенсивность минимальна. При дробном m происходит или частичное усиление (если m ближе к четному числу), или частичное ослабление (если m ближе к нечетному числу).

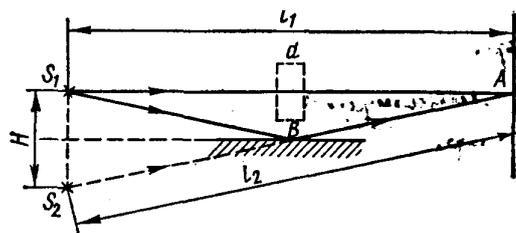


Рис. 30.3

1. Оптическая разность хода Δ_1 будет складываться из геометрической разности $l_2 - l_1$ (оба луча идут в воздухе) и дополнительной разности хода $\lambda/2$, обусловленной изменением фазы колебаний на π при отражении от среды оптически более плотной. Таким образом,

$$\Delta_1 = l_2 - l_1 + \lambda/2. \quad (2)$$

Так как $l_2 = \sqrt{l_1^2 + H^2}$ (рис. 30.3), то

$$l_2 - l_1 = l_1 \sqrt{1 + (H/l_1)^2} - l_1 = l_1 \left[\sqrt{1 + (H/l_1)^2} - 1 \right].$$

Величина $H/l_1 \ll 1$, поэтому для вычисления корня можно воспользоваться приближенной формулой (см. табл. 3)

$$\sqrt{1+a} \approx 1 + \frac{1}{2}a$$

при $a \ll 1$. Применив ее, получим

$$l_2 - l_1 \approx l_1 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{l_1} \right)^2 - 1 \right] = \frac{H^2}{2l_1}.$$

Подставив полученное выражение $l_2 - l_1$ в формулу (2), найдем

$$\Delta_1 = \frac{H^2}{2l_1} + \frac{\lambda}{2}. \text{ Зная } \Delta_1, \text{ по формуле (1) найдем } m_1:$$

$$m_1 = \frac{H^2 / (2l_1) + \lambda / 2}{\lambda / 2} = \frac{H^2}{l_1 \lambda} + 1.$$

Так как $H = 2h$, то окончательно получим

$$m_1 = 4 \frac{h^2}{l_1 \lambda} + 1.$$

После вычисления найдем

$$m_1 = 33.$$

Так как на разности хода укладывается нечетное число длин полувольт, то в точке A наблюдается минимум интенсивности.

2. Стеклаянная пластина толщиной d , поставленная на пути луча S_1A (рис. 30.3), изменит оптическую длину пути. Теперь оптическая длина пути L будет складываться из геометрической длины пути $l_1 - d$ и оптической длины пути nd луча в самой пластине, т. е.

$$L = (l_1 - d) + nd = l_1 + (n - 1)d.$$

Оптическая разность хода лучей

$$\Delta_2 = l_2 - L + \lambda/2 = l_2 - [l_1 + (n - 1)d] + \lambda/2, \text{ или}$$

$$\Delta_2 = \Delta_1 - (n - 1)d.$$

Пользуясь формулой (1), найдем

$$m_2 = \frac{\Delta_2}{\lambda/2} = \frac{\Delta_1 - (n - 1)d}{\lambda/2} = m_1 - 2 \frac{d(n - 1)}{\lambda}.$$

Произведя вычисления, получим $m_2 = 19,8$.

Число длин полувольт оказалось дробным. Так как 19,8 ближе к целому четному числу 20, чем к целому нечетному числу 19, то в точке A будет частичное усиление.

Пример 6. На толстую стеклянную пластинку, покрытую очень тонкой пленкой, показатель преломления n_2 вещества которой равен 1,4, падает нормально параллельный пучок монохроматического света ($\lambda = 0,6$ мкм). Отраженный свет максимально ослаблен вследствие интерференции. Определить толщину d пленки.

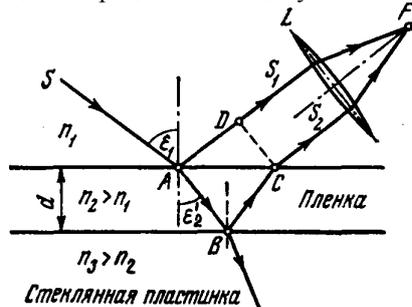


Рис. 30.4

Решение. Из световой волны, падающей на пленку, выделим узкий пучок SA . Ход этого пучка в случае, когда угол падения $\epsilon_1 \neq 0$, показан на рис. 30.4. В точках A и B падающий пучок частично отражается и частично преломляется. Отраженные пучки света AS_1 и BCS_2 падают на собирающую линзу L , пересекаются в ее фокусе F и интерферируют между собой.

Так как показатель преломления воздуха ($n_1 = 1,00029$) меньше показателя преломления вещества пленки ($n_2 = 1,4$), который, в свою очередь, меньше показателя преломления стекла ($n_3 = 1,5$), то в обоих случаях отражение происходит от среды оптически более плотной, чем та среда, в которой идет падающая волна. Поэтому фаза колебания пучка света AS_1 при отражении в точке A изменяется на π рад и точно так же на π рад изменяется фаза колебаний пучка света BCS_2 при отражении в точке B . Следовательно, результат интерференции этих пучков света при пересечении в фокусе F линзы будет такой же, как если бы никакого изменения фазы колебаний ни у того, ни у другого пучка не было.

Как известно, условие максимального ослабления света при интерференции в тонких пленках состоит в том, что оптическая разность хода Δ интерферирующих волн должна быть равна нечетному числу полувольт; $\Delta = (2k + 1)(\lambda/2)$.

Как видно из рис. 30.4, оптическая разность хода

$$\Delta = l_2 n_2 - l_1 n_1 = (|AB| + |BC|) n_2 - |AD| n_1.$$

Следовательно, условие минимума интенсивности света примет вид

$$(|AB| + |BC|) n_2 - |AD| n_1 = (2k + 1)(\lambda/2).$$

Если угол падения ε_1 будет уменьшаться, стремясь к нулю, то $AD \rightarrow 0$ и $(|AB|+|BC|) \rightarrow 2d$, где d —толщина пленки. В пределе при $\varepsilon_1=0$ будем иметь

$$\Delta = 2dn_2 = (2k+1)(\lambda/2),$$

откуда искомая толщина пленки

$$d = \frac{(2k+1)\lambda}{4n}.$$

Полагая $k=0,1,2,3,\dots$, получим ряд возможных значений толщины пленки:

$$d_0 = \frac{\lambda}{4n_2} = 0,1 \text{ мкм}; \quad d_1 = \frac{3\lambda}{4n_2} = 3d_0 = 0,33 \text{ мкм} \text{ и т.д.}$$

Пример 7. На стеклянный клин нормально к его грани падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda=0,6$ мкм. В возникшей при этом интерференционной картине на отрезке длиной $l=1$ см наблюдается 10 полос. Определить преломляющий угол θ клина.

Решение. Параллельный пучок света, падая нормально к грани клина, отражается как от верхней, так и от нижней грани. Эти пучки когерентны, и поэтому наблюдается устойчивая картина интерференции. Так как интерференционные полосы наблюдаются при малых углах клина, то отраженные пучки света 1 и 2 (рис. 30.5) будут практически параллельны.

Темные полосы видны на тех участках клина, для которых разность хода кратна нечетному числу половины длины волны;

$$\Delta = (2k+1)(\lambda/2), \text{ где } k=0,1,2,\dots \quad (1)$$

Разность хода Δ двух волн складывается из разности оптических длин путей этих волн ($2dn \cos \varepsilon_2'$) и половины длины волны ($\lambda/2$).

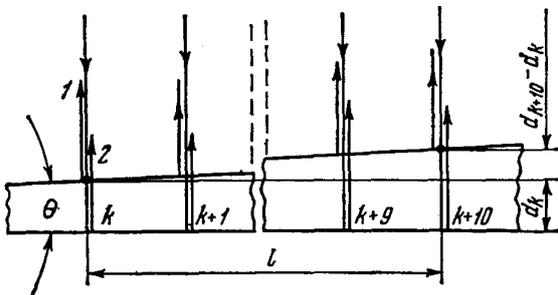


Рис. 30.5

Величина $\lambda/2$ представляет собой добавочную разность хода, возникающую при отражении волны от оптически более плотной среды. Подставляя в формулу (1) значение разности хода Δ , получим

$$2dn \cos \varepsilon_2' + \lambda/2 = (2k+1)(\lambda/2), \quad (2)$$

где n — коэффициент преломления стекла ($n=1,5$); d_k —толщина клина в том месте, где наблюдается темная полоса, соответствующая номеру k ; ε_2' —угол преломления.

Согласно условию, угол падения равен нулю, следовательно, и угол преломления ε_2' равен нулю, а $\cos \varepsilon_2'=1$. Раскрыв скобки в правой части равенства (2), после упрощения получим

$$2dn = k\lambda \quad (3)$$

Пусть произвольной темной полосе номера k соответствует определенная толщина клина в этом месте d_k а темной полосе номера $k+10$ соответствует толщина клина d_{k+10} . Согласно условию задачи, 10 полос укладываются на отрезке длиной $l=1$ см. Тогда искомый угол (рис. 30.5) будет равен

$$\theta = (d_{k+10} - d_k)/l, \quad (4)$$

где из-за малости преломляющего угла $\sin \theta = \theta$ (угол θ выражен в радианах).

Вычислив d_k и d_{k+10} из формулы (3), подставив их в формулу (4) и произведя преобразования, найдем

$$\theta = 5\lambda/(nl).$$

После вычисления получим

$$\theta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ рад.}$$

Выразим θ в градусах. Для этого воспользуемся соотношением между радианом и секундой (см. табл. 6); $1 \text{ рад} = 2,06'' \cdot 10^5$, т. е.

$$\theta = 2 \cdot 10^{-4} \cdot 2,06'' \cdot 10^5 = 41,2'',$$

или в соответствии с общим правилом перевода из радиан в градусы

$$\theta_{град} = \frac{180}{\pi} \theta_{рад}, \quad \theta = \frac{180}{3,14} \cdot 2 \cdot 10^{-4} = 1,15 \cdot 10^{-2} = 0,688 = 41,2''.$$

Искомый угол равен $41,2''$.

Пример 8. На диафрагму с круглым отверстием радиусом $r=1$ мм падает нормально параллельный пучок света длиной волны $\lambda=0,05$ мкм. На пути лучей, прошедших через отверстие, помещают экран. Определить максимальное расстояние b_{max} от центра отверстия до экрана, при котором в центре дифракционной картины еще будет наблюдаться темное пятно.

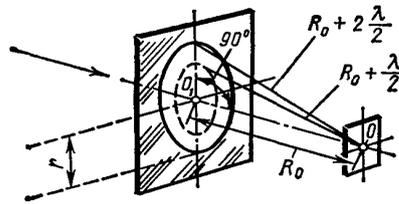


Рис. 31.1

Решение. Расстояние, при котором будет видно темное пятно, определяется числом зон Френеля, укладывающихся в отверстие. Если число зон четное, то в центре дифракционной картины будет темное пятно.

Число зон Френеля, помещающихся в отверстии, убывает по мере удаления экрана от отверстия. Наименьшее четное число зон равно двум. Следовательно, максимальное расстояние, при котором еще будет наблюдаться темное пятно в центре экрана, определяется условием, согласно которому в отверстии должны поместиться две зоны Френеля.

Из рис. 31.1 следует, что расстояние от точки наблюдения O на экране до края отверстия на $2(\lambda/2)$ больше, чем расстояние b_{max} .

По теореме Пифагора получим

$$r^2 = (b_{max} + 2 \frac{\lambda}{2})^2 - b_{max}^2 = 2\lambda b_{max} + \lambda^2.$$

Учтя, что $\lambda \ll b_{max}$ и что членом, содержащим λ^2 , можно пренебречь, последнее равенство перепишем в виде $r^2 = 2\lambda b_{max}$, откуда $b_{max} = r^2 / (2\lambda)$. Произведя вычисления по последней формуле, найдем $b_{max} = 1$ м.

Пример 9. На щель шириной $a = 0,1$ мм нормально падает параллельный пучок света от монохроматического источника ($\lambda = 0,6$ мкм). Определить ширину l центрального максимума в дифракционной картине, проецируемой с помощью линзы, находящейся непосредственно за щелью, на экран, отстоящий от линзы на расстоянии $L = 1$ м.

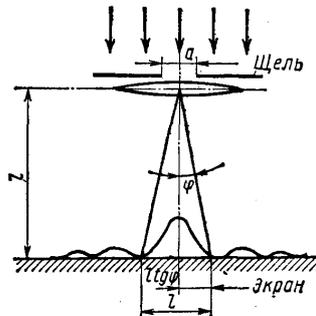


Рис. 31.2

Решение. Центральный максимум интенсивности света занимает область между ближайшими от него справа и слева минимумами интенсивности. Поэтому ширину центрального максимума интенсивности примем равной расстоянию между этими двумя минимумами интенсивности (рис. 31.2).

Минимумы интенсивности света при дифракции от одной щели наблюдаются под углами φ , определяемыми условием

$$a \sin \varphi = \pm k\lambda, \quad (1)$$

где k — порядок минимума; в нашем случае равен единице.

Расстояние между двумя минимумами на экране определим непосредственно по чертежу: $l = 2L \operatorname{tg} \varphi$. Заметив, что при малых углах $\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi$, перепишем эту формулу в виде

$$l = 2L \sin \varphi. \quad (2)$$

Выразим $\sin \varphi$ из формулы (1) и подставим его в равенство (2):

$$l = 2Lk\lambda/a. \quad (3)$$

Произведя вычисления по формуле (3), получим $l = 1,2$ см.

Пример 10. На дифракционную решетку нормально к ее поверхности падает параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0,5$ мкм. Помещенная вблизи решетки линза проецирует дифракционную картину на плоский экран, удаленный от линзы на $L = 1$ м. Расстояние l между двумя максимумами интенсивности первого порядка, наблюдаемыми на экране, равно $20,2$ см (рис. 31.3). Определить: 1) постоянную d дифракционной решетки; 2) число n штрихов на 1 см; 3) число максимумов, которое при этом дает дифракционная решетка; 4) максимальный угол φ_{max} отклонения лучей, соответствующих последнему дифракционному максимуму.

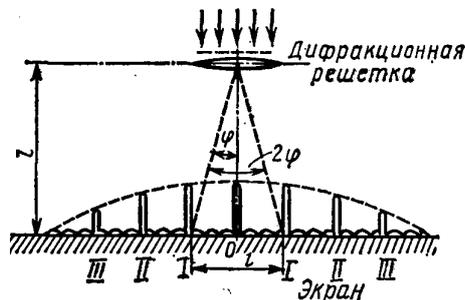


Рис. 31.3

Решение 1. Постоянная d дифракционной решетки, длина волны λ и угол φ отклонения лучей, соответствующий k -му дифракционному максимуму, связаны соотношением

$$d \sin \varphi = k\lambda, \quad (1)$$

где k — порядок спектра, или в случае монохроматического света порядок максимума.

В данном случае $k=1$, $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi$ (ввиду того, что $l/2 \ll L$), $\operatorname{tg} \varphi = (l/2)L$ (следует из рис. 31.3). С учетом последних трех равенств соотношение (1) примет вид

$$d \frac{l}{2L} = \lambda,$$

откуда постоянная решетки

$$d = 2L\lambda/l.$$

Подставляя данные, получим

$$d = 4,95 \text{ мкм.}$$

2. Число штрихов на 1 см найдем из формулы

$$n = 1/d.$$

После подстановки числовых значений получим $n = 2,02 \cdot 10^3 \text{ см}^{-1}$.

3. Для определения числа максимумов, даваемых дифракционной решеткой, вычислим сначала максимальное значение k_{\max} исходя из того, что максимальный угол отклонения лучей решеткой не может превышать 90° .

Из формулы (1) запишем

$$k_{\max} = \frac{d}{\lambda} \sin \varphi. \quad (2)$$

Подставляя сюда значения величин, получим

$$k_{\max} = 9,9.$$

Число k обязательно должно быть целым. В то же время оно не может принять значение, равное 10, так как при этом значении $\sin \varphi$ должен быть больше единицы, что невозможно. Следовательно, $k_{\max} = 9$.

Определим общее число максимумов дифракционной картины, полученной посредством дифракционной решетки. Влево и вправо от центрального максимума будет наблюдаться по одинаковому числу максимумов, равному k_{\max} , т. е. всего $2k_{\max}$. Если учесть также центральный нулевой максимум, получим общее число максимумов

$$N = 2k_{\max} + 1.$$

Подставляя значение k_{\max} найдем

$$N = 2 \cdot 9 + 1 = 19.$$

4. Для определения максимального угла отклонения лучей, соответствующего последнему дифракционному максимуму, выразим из соотношения (2) синус этого угла:

$$\sin \varphi_{\max} = k_{\max} \lambda / d.$$

Отсюда

$$\varphi_{\max} = \arcsin(k_{\max} \lambda / d).$$

Подставив сюда значения величин λ , d , k_{\max} и произведя вычисления, получим

$$\varphi_{\max} = 65,4^\circ.$$

Пример 11. Пучок естественного света падает на полированную поверхность стеклянной пластины, погруженной в жидкость. Отраженный от пластины пучок света составляет угол $\varphi = 97^\circ$ с падающим пучком (рис. 32.1). Определить показатель преломления n жидкости, если отраженный свет полностью поляризован.

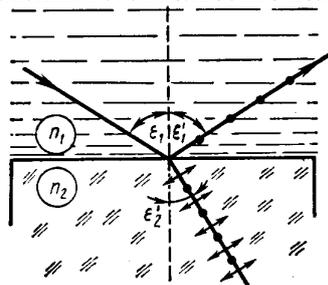


Рис. 32.1

Решение. Согласно закону Брюстера, свет, отраженный от диэлектрика, полностью поляризован в том случае, если тангенс угла падения

$$\operatorname{tg} \epsilon_{1B} = n_{21},$$

где n_{21} — относительный показатель преломления второй среды (стекла) относительно первой (жидкости).

Относительный показатель преломления равен отношению абсолютных показателей преломления этих сред.

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \epsilon_{1B} = n_2 / n_1.$$

Согласно условию задачи, отраженный луч повернут на угол φ относительно падающего луча. Так как угол падения равен углу отражения, то $\epsilon_{1B} = \varphi / 2$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(\varphi / 2) = n_2 / n_1$, откуда

$$n_1 = \frac{n_2}{\operatorname{tg}(\varphi / 2)}.$$

Сделав подстановку числовых значений, получим $n_1 = 1,33$.

Пример 12. Два николя N_1 и N_2 расположены так, что угол α между их плоскостями пропускания равен 60° . Определить: 1) во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении через один николю (N_1); 2) во сколько раз уменьшится

интенсивность света при прохождении через оба николя? При прохождении каждого из николей потери на отражение и поглощение света составляют 5 %.

Решение 1. Пучок естественного света, падая на грань николя N_1 (рис. 32.2), расщепляется вследствие двойного лучепреломления на два пучка: обыкновенный и необыкновенный. Оба пучка одинаковы по интенсивности и полностью поляризованы. Плоскость колебаний для необыкновенного пучка лежит в плоскости чертежа (плоскость главного сечения). Плоскость колебаний для обыкновенного пучка перпендикулярна плоскости чертежа. Обыкновенный пучок (o) вследствие полного отражения от границы AB отбрасывается на зачерненную поверхность призмы и поглощается ею. Необыкновенный пучок (e) проходит через николю. При этом интенсивность света уменьшается вследствие поглощения в веществе николя.

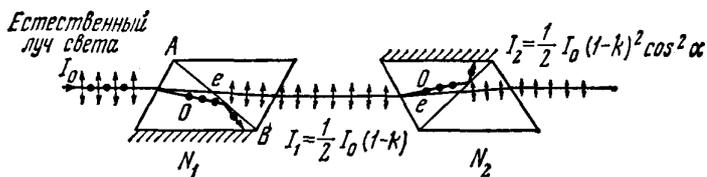


Рис. 32.2

Таким образом, интенсивность света, прошедшего через николю N_1 ,

$$I_1 = 1/2 I_0 (1-k),$$

где $k=0,05$ — относительная потеря интенсивности света в николе; I_0 — интенсивность естественного света, падающего на николю N_1 .

Относительное уменьшение интенсивности света получим, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_1 поляризованного света:

$$\frac{I_0}{I_1} = \frac{I_0}{1/2 I_0 (1-k)} = \frac{2}{1-k}.$$

Подставив числовые значения, найдем $I_0/I_1=2,10$.

Таким образом, интенсивность света при прохождении через николю N_1 уменьшается в 2,10 раза.

2. Пучок плоскополяризованного света интенсивности I_1 падает на николю N_2 и также расщепляется на обыкновенный и необыкновенный. Обыкновенный пучок полностью поглощается в николе, а интенсивность необыкновенного пучка света, вышедшего из николя, определяется законом Малюса (без учета поглощения в этом николе):

$$I_2 = I_1 \cos^2 \alpha$$

где α — угол между плоскостью колебаний в поляризованном пучке и плоскостью пропускания николя N_2 .

Учитывая потери интенсивности во втором николе, получим

$$I_2 = I_1 (1-k) \cos^2 \alpha.$$

Искомое уменьшение интенсивности при прохождении света через оба николя найдем, разделив интенсивность I_0 естественного света на интенсивность I_2 света, прошедшего систему из двух николей:

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{I_0}{I_1 (1-k) \cos^2 \alpha}.$$

Подставив данные, произведем вычисления:
$$\frac{I_0}{I_2} = 8,86$$

Таким образом, после прохождения света через два николя интенсивность его уменьшится в 8,86 раза.

Пример 13. Пучок частично-поляризованного света рассматривается через николю. Первоначально николю установлен так, что его плоскость пропускания параллельна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При повороте николя на угол ($\varphi=60^\circ$) интенсивность пропускаемого им света уменьшилась в $k=2$ раза. Определить отношение I_e/I_n интенсивностей естественного и линейно-поляризованного света, составляющих данный частично-поляризованный свет, а также степень поляризации P пучка света.

Решение. Отношение интенсивности I_e естественного света к интенсивности I_e поляризованного света найдем из следующих соображений. При первоначальном положении николя он полностью пропустит линейно-поляризованный свет и половину интенсивности естественного света. Общая интенсивность пропущенного при этом света

$$I_1 = I_n + \frac{1}{2} I_e$$

При втором положении николя интенсивность пропущенного поляризованного света определится по закону Малюса, а интенсивность пропущенного естественного света, как и в первом случае, будет равна половине интенсивности естественного света, падающего на николю. Общая интенсивность во втором случае

$$I_n + \frac{1}{2} I_e = k \left(I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_e \right)$$

В соответствии с условием задачи $I_1 = k \cdot I_2$, или

$$I_2 = I_n \cos^2 \varphi + \frac{1}{2} I_e$$

Подставив сюда значение угла φ , k и произведя вычисления, получим

$$I_e/I_n = 1, \text{ или } I_e = I_n,$$

т. е. интенсивности естественного и поляризованного света в заданном пучке равны между собой.

Степень поляризации частично-поляризованного света определяется соотношением

$$P = (I_{max} - I_{min}) / (I_{max} + I_{min}), \quad (1)$$

где I_{max} и I_{min} — соответственно максимальная и минимальная интенсивности света, пропущенного через николю.

Максимальная интенсивность $I_{max} = I_l = I_n + 1/2 I_e$, или, учитывая, что $I_e = I_n$

$$I_{max} = 3/2 I_n$$

Минимальная интенсивность соответствует положению николя, при котором плоскость пропускания его перпендикулярна плоскости колебаний линейно-поляризованного света. При таком положении николя поляризованный свет будет полностью погашен и через николю пройдет только половина интенсивности естественного света. Общая интенсивность выразится равенством

$$I_{min} = 1/2 I_e = 1/2 I_n$$

Подставив найденные выражения I_{max} и I_{min} в формулу (1), получим

$$P = \frac{3/2 I_n - 1/2 I_n}{3/2 I_n + 1/2 I_n} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, степень поляризации пучка света

$$P = 1/2.$$

Пример 14. Пластика кварца толщиной $d_1 = 1$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 20^\circ$. Определить: 1) какова должна быть толщина d_2 кварцевой пластинки, помещенной между двумя «параллельными» николями, чтобы свет был полностью погашен; 2) какой длины l трубку с раствором сахара массовой концентрацией $C = 0,4$ кг/л надо поместить между николями для получения того же эффекта? Удельное вращение $[\alpha]$ раствора сахара равно $0,665$ град/(м*кг*м⁻³).

Решение. 1. Угол поворота плоскости поляризации кварцевой пластинкой определяется соотношением $\varphi = \alpha * d$.

Пользуясь этой формулой, выразим искомую толщину d_2 пластинки:

$$d_2 = \varphi_2 / \alpha \quad (1)$$

где φ_2 — угол поворота плоскости поляризации, при котором свет будет полностью погашен ($\varphi_2 = 90^\circ$).

Постоянную вращения α для кварца найдем также из формулы $\varphi = \alpha * d$, подставив в нее заданные в условии задачи значения d_1 и φ_1 :

$$\alpha = \varphi_1 / d_1$$

Подставив это выражение α в формулу (1), получим

$$d_2 = (\varphi_2 / \varphi_1) d_1$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем толщину пластинки:

$$d_2 = 4,5 \text{ мм.}$$

2. Длину трубки с сахарным раствором найдем из соотношения $\varphi_2 = [\alpha] C d$, выражающего угол поворота плоскости поляризации раствором сахара, где d — толщина раствора сахара (принимается равной длине l трубки). Отсюда получим

$$l = \varphi_2 / ([\alpha] C).$$

Подставив сюда значения φ_2 , $[\alpha]$, $C = 0,4$ кг/л $= 400$ кг/м³ и произведя вычисления, найдем

$$l = 3,8 \text{ дм.}$$

Пример 15. Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 600$ нм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $v = 0,1c$ (c — скорость распространения электромагнитных волн). Определить длину волны λ излучения, которую зарегистрирует спектральный прибор наблюдателя.

Решение. В системе отсчета, связанной с наблюдателем, спектральный прибор регистрирует электромагнитное излучение частоты

$$\nu = \frac{\nu_0 \sqrt{1 - \beta^2}}{(1 + \beta^2 \cos \vartheta)} \quad (1)$$

где ν_0 — собственная частота монохроматического излучения источника; $\beta = v/c$; ϑ — угол между вектором \mathbf{v} и направлением наблюдения, измеренный в системе отсчета, связанной с наблюдателем.

Выразим частоты ν и ν_0 через длины волн λ и λ_0 : $\nu = c/\lambda$ и $\nu_0 = c/\lambda_0$. Заметив, что в нашем случае $\vartheta = \pi$ ($\cos \vartheta = -1$), перепишем формулу (1) с учетом последних соотношений:

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_0} \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta}$$

Откуда

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{(1 - \beta) / (1 + \beta)}.$$

Подставим значения β ($\beta = v/c = 0,1$) и λ_0 в полученное выражение и произведем вычисления:

$$\lambda = 542 \text{ нм.}$$

Пример 16. Каким минимальным импульсом p_{min} (в единицах МэВ/с) должен обладать электрон, чтобы эффект Вавилова — Черенкова можно было наблюдать в воде?

Решение. Эффект Вавилова — Черенкова состоит в излучении света, возникающем при движении в веществе заряженных частиц со скоростью v , превышающей скорость распространения световых волн (фазовую скорость) в этой среде. Так как фазовая скорость света $v_\phi = c/n$ (c — скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме; n —

показатель преломления среды), то условием возникновения эффекта Вавилова — Черенкова является

$$v > v_{\phi}, \text{ или } v > c/n.$$

Обычно это условие записывают иначе, учитывая, что $\beta = v/c$:

$$\beta n > 1. \quad (1)$$

Поскольку черенковское излучение наблюдается для релятивистских частиц, то запишем сначала выражение для релятивистского импульса:

$$P = mv = m^0 v / (1 - \beta^2)^{0.5}, \text{ или } p = m_0 c \beta / (1 - \beta^2)^{0.5}$$

где учтено, что $v = \beta c$.

Минимальному импульсу соответствует минимальное значение β_{\min} которое находим из условия (1):

$$\beta_{\min} = 1/n.$$

Тогда минимальное значение импульса

$$P_{\min} = m_0 c / (n^2 - 1)^{0.5} \quad (2)$$

Вычисления выполним во внесистемных единицах — МэВ/с (c — скорость распространения электромагнитного излучения). Для этого поступим следующим образом. Известно, что $m_0 c^2 = 0,511$ МэВ, отсюда запишем $m_0 c = 0,511$ МэВ/с.

Подставив в (2) $n = 1,33$ и найденное значение $m_0 c$, произведем вычисления:

$$P_{\min} = 0,583 \text{ МэВ/с.}$$

Пример 17. Исследование спектра излучения Солнца показывает, что максимум спектральной плотности энергетической светимости соответствует длине волны $\lambda = 500$ нм. Принимая Солнце за черное тело, определить: 1) энергетическую светимость M_e Солнца;

2) поток энергии Φ_e излучаемый Солнцем; 3) массу m электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за 1 с.

Решение 1. Энергетическая светимость M_e черного тела выражается формулой Стефана — Больцмана

$$M_e = \sigma T^4 \quad (1)$$

Температура излучающей поверхности может быть определена из закона смещения Вина. $\lambda_m = b/T$. Выразив отсюда температуру T и подставив ее в формулу (1), получим

$$M_e = \sigma (b/\lambda_m)^4, \quad (2)$$

Произведя вычисления по формуле (2), найдем

$$M_e = 64 \text{ МВт/м}^2.$$

2. Поток энергии Φ_e , излучаемый Солнцем, равен произведению энергетической светимости Солнца на площадь S его поверхности.

$$\Phi_e = 4\pi r^2 M_e, \quad (3)$$

где r — радиус Солнца

Подставив в формулу (3) значения π , r и M_e и произведя вычисления, получим

$$\Phi_e = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Вт.}$$

3. Массу электромагнитных волн (всех длин), излучаемых Солнцем за время $t = 1$ с, определим, применив закон пропорциональности массы и энергии $E = mc^2$. Энергия электромагнитных волн, излучаемых за время t , равна произведению потока энергии Φ (мощности излучения) на время $E = \Phi t$. Следовательно, $\Phi_e = mc^2$, откуда $m = \Phi_e / c^2$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$m = 4,3 \cdot 10^9 \text{ кг.}$$

Пример 18. Длина волны λ_m , на которую приходится максимум энергии в спектре излучения черного тела, равна 0,58 мкм. Определить максимальную спектральную плотность энергетической светимости $(M_{\lambda,T})_{\max}$, рассчитанную на интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ нм, вблизи λ_m .

Решение. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости пропорциональна пятой степени температуры Кельвина и выражается формулой

$$(M_{\lambda,T})_{\max} = CT^5. \quad (1)$$

Температуру T выразим из закона смещения Вина $\lambda_m = b/T$, откуда $T = b/\lambda_m$

Подставив полученное выражение температуры в формулу (1), найдем

$$(M_{\lambda,T})_{\max} = C(b/\lambda_m)^5,$$

В табл. 24 значение C дано в единицах СИ, в которых единичный интервал длин волн $\Delta\lambda = 1$ м. По условию же задачи требуется вычислить спектральную плотность энергетической светимости, рассчитанную на интервал длин волн 1 нм, поэтому выпишем значение C в единицах СИ и пересчитаем его на заданный интервал длин волн:

$$C = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/(м}^3 \text{К}^5) = 1,30 \cdot 10^{-5} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{м} \cdot \text{К}^5) = 1,30 \cdot 10^{-14} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{нм} \cdot \text{К}^5).$$

Вычисление по формуле (2) дает

$$(\epsilon_{\lambda,T})_{\max} = 40,6 \text{ кВт/(м} \cdot \text{нм}).$$

Пример 19. Определить максимальную скорость v_{\max} фотоэлектронов, вырывааемых с поверхности серебра: 1) ультрафиолетовым излучением с длиной волны $\lambda_1 = 0,155$ мкм; 2) γ -излучением с длиной волны $\lambda_2 = 2,47$ пм.

Решение. Максимальную скорость фотоэлектронов определим из уравнения Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\epsilon = A + T_{\max} \quad (1)$$

Энергия фотона вычисляется по формуле $\epsilon = hc/\lambda$, работа выхода A указана в табл. 20 для серебра $A = 4,7$ эВ.

Кинетическая энергия фотоэлектрона в зависимости от того, какая скорость ему сообщается, может быть выражена или по классической формуле

$$T = \frac{1}{2} m_0 v^2 \quad (2)$$

или по релятивистской

$$T = (m - m_0)c^2 \quad (3)$$

Скорость фотоэлектрона зависит от энергии фотона, вызывающего фотоэффект: если энергия фотона ϵ много меньше энергии покоя электрона E_0 , то может быть применена формула (2); если же ϵ сравнима по размеру с E_0 , то вычисление по

формуле (2) приводит к грубой ошибке, в этом случае кинетическую энергию фотоэлектрона необходимо выражать по формуле (3)

1. В формулу энергии фотона $\varepsilon = hc/\lambda$ подставим значения величин h , c и λ и, произведя вычисления, для ультрафиолетового излучения получим

$$\varepsilon_1 = 1,28 \text{ аДж} = 8 \text{ эВ.}$$

Это значение энергии фотона много меньше энергии покоя электрона (0,51 МэВ). Следовательно, для данного случая максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона в формуле (1) может быть выражена по классической формуле (2) $\varepsilon_1 = A + \frac{1}{2} m_0 v_{\max}^2$, откуда

$$v_{\max} = \sqrt{2(\varepsilon_1 - A) / m_0} \quad (4)$$

Выпишем величины, входящие в формулу (4): $\varepsilon_1 = 1,28 \cdot 10^{-18}$ Дж (вычислено выше); $A = 4,7$ эВ = $4,7 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж = $0,75 \cdot 10^{-18}$ Дж; $m_0 = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг (см. табл. 24).

Подставив числовые значения в формулу (4), найдем максимальную скорость:

$$v_{\max} = 1,08 \text{ Мм/с.}$$

2. Вычислим теперь энергию фотона γ -излучения:

$$\varepsilon_2 = hc/\lambda_2 = 8,04 \text{ фДж} = 0,502 \text{ МэВ.}$$

Работа выхода электрона ($A = 4,7$ эВ) пренебрежимо мала по сравнению с энергией γ -фотона, поэтому можно принять, что максимальная кинетическая энергия электрона равна энергии фотона:

$$T_{\max} = \varepsilon_2 = 0,502 \text{ МэВ.}$$

Так как в данном случае кинетическая энергия электрона сравнима с его энергией покоя, то для вычисления скорости электрона следует взять релятивистскую формулу кинетической энергии, $T = E_0 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right)$

где $E_0 = m_0 c^2$.

$$\text{Выполнив преобразования, найдем } \beta = \sqrt{(2E_0 + T)T / (E_0 + T)}$$

Сделаем вычисления, получим $\beta = 0,755$.

Следовательно, максимальная скорость фотоэлектронов, вырываемых γ -излучением,

$$v_{\max} = c\beta = 226 \text{ Мм/с}$$

Пример 20. Определить красную границу λ_0 фотоэффекта для цезия, если при облучении его поверхности фиолетовым светом длиной волны $\lambda = 400$ нм максимальная скорость v_{\max} фотоэлектронов равна 0,65 Мм/с.

Решение. При облучении светом, длина волны λ_0 которого соответствует красной границе фотоэффекта, скорость, а следовательно, и кинетическая энергия фотоэлектронов равны нулю. Поэтому уравнение Эйнштейна для фотоэффекта $\varepsilon = A + T$ в случае красной границы запишется в виде

$$\varepsilon = A, \text{ или } hc/\lambda_0 = A.$$

Отсюда

$$\lambda_0 = hc/A. \quad (1)$$

Работу выхода для цезия определим с помощью уравнения Эйнштейна:

$$A = \varepsilon - T = \frac{hc}{\lambda} - \frac{mv^2}{2} \quad (2)$$

Выпишем числовые значения величин, выразив их в СИ: $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж*с; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; $\lambda = 400$ нм = $4 \cdot 10^{-7}$ м; $m = 9,11 \cdot 10^{-31}$ кг; $v = 6,5 \cdot 10^5$ м/с.

Подставив эти значения величин в формулу (2) и вычислив, получим

$$A = 3,05 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} = 0,305 \text{ аДж.}$$

Для определения красной границы фотоэффекта подставим значения A , h и c в формулу (1) и вычислим:

$$\lambda_0 = 651 \text{ нм.}$$

Пример 21. Пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 663$ нм падает нормально на зеркальную плоскую поверхность. Поток энергии $\Phi_e = 0,6$ Вт. Определить силу F давления, испытываемую этой поверхностью, а также число N фотонов, падающих на нее за время $t = 5$ с

Решение Сила светового давления на поверхность равна произведению светового давления p на площадь S поверхности:

$$F = pS. \quad (1)$$

Световое давление может быть найдено по формуле

$$p = E_e(\rho + 1)/c \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) давления света в формулу (1), получим

$$F = [(E_e S)/c] * (\rho + 1). \quad (3)$$

Так как произведение облученности E_e на площадь S поверхности равно потоку Φ энергии излучения, падающего на поверхность, то соотношение (3) можно записать в виде

$$F = (\Phi/c) * (\rho + 1).$$

После подстановки значений Φ_e и c с учетом, что $\rho = 1$ (поверхность зеркальная), получим

$$F = 4 \text{ нН.}$$

Число N фотонов, падающих за время Δt на поверхность, определяется по формуле

$$N = \Delta W / \varepsilon = \Phi_e \Delta t / \varepsilon,$$

где ΔW — энергия излучения, получаемая поверхностью за время Δt

Выразив в этой формуле энергию фотона через длину волны ($\varepsilon = hc/\lambda$), получим

$$N = \Phi_e \lambda \Delta t / (hc).$$

Подставив в этой формуле числовые значения величин, найдем

$$N = 10^{19} \text{ фотонов.}$$

Пример 22. Параллельный пучок света длиной волны $\lambda = 500$ нм падает нормально на зачерненную поверхность, производя давление $p = 10$ мкПа. Определить: 1) концентрацию n фотонов в пучке, 2) число n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с .

Решение. 1. Концентрация n фотонов в пучке может быть найдена, как частное от деления объемной плотности энергии ω на энергию ε одного фотона:

$$n = \omega / \varepsilon \quad (1)$$

Из формулы $p = \omega(1 + \rho)$, определяющей давление света, где ρ — коэффициент отражения, найдем

$$\omega = p / (\rho + 1). \quad (2)$$

Подставив выражение для ω из уравнения (2) в формулу (1), получим

$$n = \rho / [(\rho + 1) \cdot \varepsilon]. \quad (3)$$

Энергия фотона зависит от частоты ν , а следовательно, и от длины световой волны λ :

$$\varepsilon = h\nu = hc / \lambda \quad (4)$$

Подставив выражение для энергии фотона в формулу (3), определим искомую концентрацию фотонов:

$$n = (\rho \lambda) / [(\rho + 1) \cdot \varepsilon]. \quad (5)$$

Коэффициент отражения ρ для зачерненной поверхности принимаем равным нулю.

Подставив числовые значения в формулу (5), получим

$$n = 2,52 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3}.$$

2. Число n_1 фотонов, падающих на поверхность площадью 1 м^2 за время 1 с , найдем из соотношения $n_1 = N / (St)$, где N — число фотонов, падающих за время t на поверхность площадью S . Но $N = ncSt$, следовательно,

$$n_1 = (ncSt) / (St) = nc$$

Подставив сюда значения n и c , получим

$$n_1 = 7,56 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Пример 23. В результате эффекта Комптона фотон при соударении с электроном был рассеян на угол $\theta = 90^\circ$. Энергия ε' рассеянного фотона равна $0,4$ МэВ. Определить энергию ε фотона до рассеяния.

Решение. Для определения первичного фотона воспользуемся формулой Комптона в виде

$$\lambda' - \lambda = 2 \cdot [(2\pi\hbar) / (mc)] \cdot \sin^2(\theta/2). \quad (1)$$

Формулу (1) преобразуем следующим образом: 1) выразим длины волн λ' и λ через энергии ε' и ε соответствующих фотонов, воспользовавшись соотношением $\varepsilon = 2\pi\hbar c / \lambda$; 2) умножим числитель и знаменатель правой части формулы на c . Тогда получим

$$\frac{2\pi\hbar'c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar'c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar'c}{mc^2} 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Сократив на $2\pi\hbar'c$, выразим из этой формулы искомую энергию:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon' mc^2}{mc^2 - \varepsilon' \cdot 2 \sin^2(\theta/2)} = \frac{\varepsilon' E_0}{E_0 - 2\varepsilon' - \sin^2(\theta/2)} \quad (2)$$

Вычисления по формуле (2) удобнее вести во внесистемных единицах. Взяв из табл. 22 значение энергии покоя электрона в мегаэлектрон-вольтах и подставив числовые данные, получим

$$\varepsilon = 1,85 \text{ МэВ.}$$

Пример 24. Фотон с энергией $\varepsilon = 0,75$ МэВ рассеялся на свободном электроне под углом $\theta = 60^\circ$. Принимая, что кинетическая энергия и импульс электрона до соударения с фотоном были пренебрежимо малы, определить: 1) энергию ε' рассеянного фотона; 2) кинетическую энергию T электрона отдачи; 3) направление его движения.

Решение. 1. Энергию рассеянного фотона найдем, воспользовавшись формулой Комптона: $\lambda' - \lambda = \frac{2\pi\hbar'}{mc} (1 - \cos \theta)$

Выразив длины волн λ' и λ через энергии ε' и ε соответствующих фотонов, получим

$$\frac{2\pi\hbar'c}{\varepsilon'} - \frac{2\pi\hbar'c}{\varepsilon} = \frac{2\pi\hbar'c}{mc} (1 - \cos \theta)$$

Разделим обе части этого равенства на $2\pi\hbar'c$: $\frac{1}{\varepsilon'} - \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1 - \cos \theta}{mc^2}$

Отсюда, обозначив для краткости энергию покоя электрона mc^2 через E_0 , найдем

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(\varepsilon / E_0)(1 - \cos \theta) + 1} \quad (1)$$

Подставив числовые значения величин, получим $\varepsilon' = 0,43$ МэВ.

2. Кинетическая энергия электрона отдачи, как это следует из закона сохранения энергии, равна разности между энергией ε падающего фотона и энергией ε' рассеянного фотона:

$$T = \varepsilon - \varepsilon' = 0,32 \text{ МэВ.}$$

3. Направление движения электрона отдачи найдем, применив закон сохранения импульса, согласно которому импульс падающего фотона p равен векторной сумме импульсов рассеянного фотона p' и электрона отдачи mv :

$$p = p' + mv.$$

Векторная диаграмма импульсов изображена на рис. 37.1. Все векторы проведены из точки O , где находился электрон в момент соударения с фотоном. Угол ϕ определяет направление движения электрона отдачи.

Из треугольника OCD находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|CD|}{|OD|} = \frac{|CA| \sin \theta}{|OA| - |CA| \cos \theta}$$

или

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{p' \sin \theta}{p - p' \cos \theta} = \frac{\sin \theta}{p / p' - \cos \theta}$$

Так как $p = \epsilon / c$ и $p' = \epsilon' / c$, то

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{\epsilon / \epsilon' - \cos \theta} \quad (2)$$

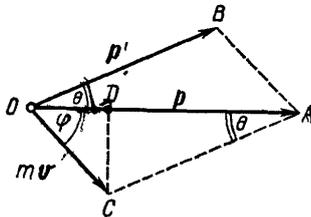


Рис.37.1

Преобразуем формулу (2) так, чтобы угол φ выражался непосредственно через величины ϵ и θ , заданные в условии задачи. Из формулы (1) следует

$$\frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{\epsilon}{E_0} (1 - \cos \theta) + 1 \quad (3)$$

Заменим в формуле (2) соотношение ϵ / ϵ' по формуле (3):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \theta}{(1 + \epsilon / E_0)(1 - \cos \theta)}$$

Учитывая, что $\sin \theta = 2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ и $1 - \cos \theta = 2 \sin^2(\theta/2)$, после соответствующих преобразований получим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{c \operatorname{tg}(\theta/2)}{1 + \epsilon / E_0} \quad (4)$$

После вычисления по формуле (4) найдем $\operatorname{tg} \varphi = 0,701$, откуда $\varphi = 35^\circ$.

Пример 25. Вычислить радиус первой орбиты атома водорода (Боровский радиус) и скорость электрона на этой орбите.

Решение. Согласно теории Бора, радиус r электронной орбиты и скорость v электрона на ней связаны равенством $mvr = n\hbar$. Так как в задаче требуется определить величины, относящиеся к первой орбите, то главное квантовое число $n=1$ и указанное выше равенство примет вид

$$mvr = \hbar. \quad (1)$$

Для определения двух неизвестных величин r и v необходимо еще одно уравнение. В качестве второго уравнения воспользуемся уравнением движения электрона. Согласно теории Бора, электрон вращается вокруг ядра. При этом сила взаимодействия между электрическими зарядами ядра и электрона сообщает электрону центростремительное ускорение. На основании второго закона Ньютона можем записать

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

(e и m — заряд и масса электрона), или

$$mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \quad (2)$$

Совместное решение равенств (1) и (2) относительно r дает $r = 4\pi\epsilon_0 \hbar^2 / (me^2)$.

Подставив сюда значения \hbar , e , m и произведя вычисления, найдем боровский радиус:

$$r = a = 5,29 \cdot 10^{-11} \text{ м.}$$

Из равенства (1) получим выражение скорости электрона на первой орбите:

$$v = \hbar / (mr).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем

$$v = 2,18 \text{ Мм/с.}$$

Пример 26. Определить энергию ϵ фотона, соответствующего второй линии в первой инфракрасной серии (серии Пашена) атома водорода.



Рис.38.1

Решение. Энергия ϵ фотона, излучаемого атомом водорода при переходе электрона с одной орбиты на другую,

$$\epsilon = E_i \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

где E_i — энергия ионизации атома водорода; $n_1=1,2,3,\dots$ — номер орбиты, на которую переходит электрон (рис. 38.1);

$n_2=n_1+1; n_1+2; \dots; n_1+m$ — номер орбиты, с которой переходит электрон; m — номер спектральной линии в данной серии. Для серии Пашена $n_1=3$; для второй линии этой серии $m=2$, $n_2=n_1+m=3+2=5$.

Подставив числовые значения, найдем энергию фотона:

$$\varepsilon = 0,97 \text{ эВ.}$$

Пример 27. Определить длину волны $\lambda_{K\alpha}$ и энергию $\varepsilon_{K\alpha}$ фотона K_α -линии рентгеновского спектра, излучаемого вольфрамом при бомбардировке его быстрыми электронами.

Решение. При бомбардировке вольфрама быстрыми электронами возникает рентгеновское излучение, имеющее линейчатый спектр. Быстрые электроны, проникая внутрь электронной оболочки атома, выбивают электроны, принадлежащие электронным слоям.

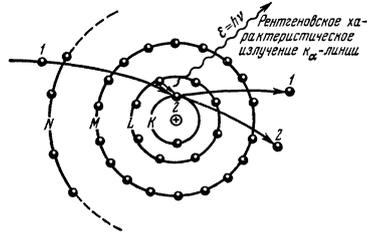


Рис. 39.1

Ближайший к ядру электронный слой (K-слой) содержит два электрона. Если один из этих электронов оказывается выбитым за пределы атома, то на освободившееся место переходит электрон из вышележащих слоев (L, M, N). При этом возникает соответствующая линия K-серии. При переходе электрона с L-слоя на K-слой излучается наиболее интенсивная K_α -линия рентгеновского спектра (рис. 39.1).

Длина волны этой линии определяется по закону Мозли:

$$\frac{1}{\lambda_{K\alpha}} = \frac{3}{4} R'(Z-1)^2$$

Откуда

$$\lambda_{K\alpha} = \frac{4}{3R'(Z-1)^2}$$

Подставив сюда значения Z (для вольфрама $Z=74$) и R' , найдем

$$\lambda_{K\alpha} = 2,28 \cdot 10^{-11} \text{ м} = 22,8 \text{ пм.}$$

Зная длину волны, определим энергию фотона по формуле

$$\varepsilon_{K\alpha} = 2\pi\hbar c / \lambda.$$

Подставив в эту формулу значения \hbar , c , $\lambda_{K\alpha}$ и произведя вычисления, найдем

$\varepsilon_{K\alpha} = 54,4 \text{ кэВ}$. Заметим, что энергию фотона α -линии K-серии рентгеновского излучения можно определить также непосредственно по формуле

$$\varepsilon_{K\alpha} = \frac{3}{4} E_i(Z-1)^2, \text{ приведенной в начале параграфа.}$$

Пример 28. Определить напряжение U , под которым работает рентгеновская трубка, если коротковолновая граница λ_{\min} в спектре тормозного рентгеновского излучения оказалась равной 15,5 пм.

Решение. Тормозное рентгеновское излучение возникает за счет энергии, теряемой электроном при торможении. В рентгеновской трубке электрон приобретает кинетическую энергию T , которая связана с ускоряющей разностью потенциалов U соотношением

$$T = |e|U, \quad (1)$$

где e — заряд электрона.

В соответствии с законом сохранения энергии энергия фотона не может превысить кинетической энергии электрона ($\hbar\omega \leq T$). Максимальная энергия фотона в этом случае определяется равенством

$$\hbar\omega = T = |e|U. \quad (2)$$

Так как максимальная угловая частота ω_{\max} связана с минимальной длиной волны λ_{\min} соотношением

$$\lambda_{\min} = 2\pi c / \omega_{\max}$$

то из выражений (1) и (2) находим

$$U = \frac{2\pi\hbar c}{|e|U}$$

Произведем вычисления:

$$U = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 1,05 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{1,60 \cdot 10^{-19} \cdot 1,55 \cdot 10^{-11}} \text{ В} = 7,98 \cdot 10^4 \text{ В} = 79,8 \text{ кВ.}$$

Пример 29. Водород обогащен дейтерием. Определить массовые доли ω_1 протия и ω_2 дейтерия, если относительная атомная масса A_R такого водорода оказалась равной 1,122.

Решение. Массовые доли ω_1 протия и ω_2 дейтерия можно выразить соотношениями

$$\omega_1 = m_1(m_1+m_2); \quad \omega_2 = m_2/(m_1+m_2), \text{ где } m_1 \text{ и } m_2 \text{ — массы соответственно протия и дейтерия в смеси.}$$

Выразим из этих равенств массы m_1 и m_2

$$m_1 = \omega_1(m_1+m_2); \quad m_2 = \omega_2(m_1+m_2)$$

и подставим их в знаменатель формулы, определяющей молярную массу M смеси: $M = \frac{M_1 M_2}{\omega_1 M_2 + \omega_2 M_1}$

где M_1 и M_2 — молярные массы компонентов смеси. После такой подстановки и простых преобразований получим

$$M = \frac{m_1 + m_2}{m_1 / M_1 + m_2 / M_2}$$

Так как молярные массы протия и дейтерия пропорциональны их относительным атомным массам, то равенство (1) можно переписать в виде

$$A_r = \frac{A_{r1} A_{r2}}{\omega_1 A_{r2} + \omega_2 A_{r1}} \quad (2)$$

где A_{r1} и A_{r2} — относительные атомные массы соответственно протия и дейтерия.

Заметим далее, что сумма массовых долей всех компонентов должна быть равна единице, т. е.

$$\omega_1 + \omega_2 = 1. \quad (3)$$

Решив совместно равенства (2) и (3), найдем

$$\omega_1 = \frac{A_{r1} A_{r2} - A_r A_{r1}}{A_r (A_{r2} - A_{r1})};$$

$$\omega_2 = \frac{A_{r1} A_{r2} - A_r A_{r2}}{A_r (A_{r1} - A_{r2})}$$

В таблице найдем: $A_{r1} = 1,00783$, $A_{r2} = 2,01410$.

Подставив числовые значения величин в (4) и (5), получим

$\omega_1 = 0,796$ и $\omega_2 = 0,204$.

Пример 30. Определить отношение сечений σ_1 / σ_2 ядер висмута $^{209}_{83}\text{Bi}$ и алюминия $^{27}_{13}\text{Al}$.

Решение. Будем рассматривать ядро как шар радиусом r . Тогда площадь его поперечного сечения (сечения ядра) может быть найдена по формуле

$$\sigma = \pi r^2.$$

Радиус ядра зависит от числа нуклонов в ядре (массового числа A) и определяется соотношением

$$r = r_0 A^{1/3}$$

где r_0 — коэффициент пропорциональности, практически одинаковый для всех ядер. Тогда
$$\sigma = \pi r_0^2 A^{2/3}$$

Используя это выражение, найдем сечения σ_1 и σ_2 ядер висмута и алюминия с массовыми числами A_2 и A_1 .

$$\sigma_1 = \pi r_0^2 A_1^{2/3}$$

и

$$\sigma_2 = \pi r_0^2 A_2^{2/3}$$

Отношение сечений найдем разделив σ_1 на σ_2 :

$$\sigma_1 / \sigma_2 = (A_1 / A_2)^{2/3}$$

Сделав подстановку числовых значений ($A_1 = 209$ и $A_2 = 27$), получим

$$\sigma_1 / \sigma_2 = 3,91.$$

Пример 31. Ядро нептуния $^{234}_{93}\text{Np}$ захватило электрон из К-оболочки атома (К-захват) и испустило α -частицу. Ядро какого элемента получилось в результате этих превращений?

Решение. При К-захвате из ближайшей к ядру электронной оболочки (К-оболочки) атома электрон захватывается ядром. В результате этого протон в ядре превращается в нейтрон *. Общее число нуклонов в ядре не изменяется, а зарядовое число уменьшится на единицу. Поэтому промежуточное ядро будет иметь зарядовое число $93 - 1 = 92$; массовое число останется прежним — 234. По таблице Д. И. Менделеева определяем, что промежуточным ядром является изотоп урана $^{234}_{92}\text{U}$.

Промежуточное ядро испустило α -частицу. Так как α -частица (ядро атома изотопа гелия ^4_2He) содержит два протона и два нейтрона, то промежуточное ядро $^{234}_{92}\text{U}$ при акте испускания α -частицы уменьшит зарядовое число на две единицы и массовое число на четыре единицы. Таким образом, конечное ядро будет иметь $Z = 90$ и $A = 230$, что соответствует изотопу тория $^{230}_{90}\text{Th}$.

Пример 32. Определить начальную активность A_0 радиоактивного магния ^{27}Mg массой $m = 0,2$ мкг, а также активность A по истечении времени $t = 1$ ч. Предполагается, что все атомы изотопа радиоактивны.

Решение. Начальная активность изотопа

$$A_0 = \lambda N_0 \quad (1)$$

где λ — постоянная радиоактивного распада; N_0 — количество атомов изотопа в начальный момент ($t = 0$).

Если учесть, что

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}$$

$$N_0 = \frac{m}{M} N_A$$

то формула (1) примет вид

$$A_0 = \frac{mN_A}{MT_{1/2}} \ln 2$$

Выразим входящие в эту формулу величины в СИ и произведем вычисления:

$$A_0 = 5,15 \cdot 10^{12} \text{ Бк} = 5,15 \text{ ТБк}$$

Активность изотопа уменьшается со временем по закону

$$A = A_0 e^{-\lambda t} \quad (3)$$

Заменив в формуле (3) постоянную распада λ ее выражением, получим

$$A = A_0 e^{-\ln 2 \cdot t / T_{1/2}} = A_0 (e^{\ln 2})^{-t / T_{1/2}}$$

Так как $e^{\ln 2} = 2$ окончательно будем иметь

$$A = A_0 / 2^{t / T_{1/2}}$$

Сделав подстановку числовых значений, получим $A = 8,05 \cdot 10^{10} \text{ Бк} = 80,5 \text{ ГБк}$.

Пример 33. При определении периода полураспада $T_{1/2}$ короткоживущего радиоактивного изотопа использован счетчик импульсов. За время $\Delta t = 1$ мин в начале наблюдения ($t=0$) было насчитано $\Delta n_1 = 250$ импульсов, а по истечении времени $t=1$ ч — $\Delta n_2 = 92$ импульса. Определить постоянную радиоактивного распада λ и период полураспада $T_{1/2}$ изотопа.

Решение. Число импульсов Δn , регистрируемых счетчиком за время Δt , пропорционально числу распавшихся атомов ΔN .

Таким образом, при первом измерении

$$\Delta n_1 = k \Delta N_1 = k N_1 (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \quad (1)$$

где N_1 — количество радиоактивных атомов к моменту начала отсчета; k — коэффициент пропорциональности (постоянный для данного прибора и данного расположения прибора относительно радиоактивного изотопа).

При повторном измерении (предполагается, что расположение приборов осталось прежним)

$$\Delta n_2 = k \Delta N_2 = k N_2 (1 - e^{-\lambda \Delta t}), \quad (2)$$

где N_2 — количество радиоактивных атомов к моменту начала второго измерения.

Разделив соотношение (1) на выражение (2) и приняв во внимание, что по условию задачи Δt одинаково в обоих случаях, а также что N_1 и N_2 связаны между собой соотношением $N_2 = N_1 e^{-\lambda t}$, получим

$$\Delta n_1 / \Delta n_2 = e^{\lambda t} \quad (3)$$

где t — время, прошедшее от первого до второго измерения. Для вычисления λ выражение (3) следует прологарифмировать: $\ln(\Delta n_1 / \Delta n_2) = \lambda t$, откуда

$$\lambda = (1/t) \cdot \ln(\Delta n_1 / \Delta n_2).$$

Подставив числовые данные, получим постоянную радиоактивного распада, а затем и период полураспада:

$$\lambda = (1/1) \cdot \ln(250/92) \text{ ч}^{-1} = 1 \text{ ч}^{-1};$$

$$T_{1/2} = \ln 2 / \lambda = 0,693 / 1 = 0,693 \text{ ч} = 41,5 \text{ мин}.$$

Пример 34. Вычислить дефект массы Δm и энергию связи $E_{\text{св}}$ ядра ${}^{11}_5\text{B}$.

Решение. Дефект массы ядра определим по формуле

$$\Delta m = Zm^1_1\text{H} + (A - Z)m_n - m_a, \quad (1)$$

Вычисление дефекта массы выполним во внесистемных единицах (а. е. м.). Для ядра ${}^{11}_5\text{B}$ $Z=5$, $A=11$. Массы нейтральных атомов водорода (${}^1_1\text{H}$) и бора (${}^{11}_5\text{B}$), а также нейтрона (n) найдем из табл. 21.

Подставим найденные массы в выражение (1) и произведем вычисления:

$$\Delta m = [5 \cdot 1,00783 + 11 - 5] \cdot 1,00867 - 11,00931 \text{ а. е. м.}, \text{ или}$$

$$\Delta m = 0,08186 \text{ а. е. м.}$$

Энергия связи ядра определяется соотношением

$$E_{\text{св}} = \Delta m c^2. \quad (2)$$

Энергию связи ядра также найдем во внесистемных единицах (МэВ). Для этого дефект массы подставим в выражение (2) в а. е. м., а коэффициент пропорциональности (c^2) — в МэВ/ (а. е. м.), т. е.

$$E_{\text{св}} = 931 \cdot 4 \cdot 1,08186 \text{ МэВ} = 76,24 \text{ МэВ},$$

и округлим полученный результат до трех значащих цифр:

$$E_{\text{св}} = 76,2 \text{ МэВ}.$$

Пример 35. Определить удельную энергию связи ядра ${}^7_3\text{Li}$.

Решение. Удельная энергия связи есть энергия связи ядра, приходящаяся на один нуклон:

$$E_{\text{уд}} = E_{\text{св}} / c^2,$$

или

$$E_{\text{уд}} = (c^2 / A) \cdot [Zm^1_1\text{H} + (A - Z)m_n - m_a],$$

Подставим в эту формулу значения величин (см. табл. 21, 22) и произведем вычисления:

$$E_{\text{уд}} = [3 \cdot 1,00783 + (7 - 3) \cdot 1,00867 - 7,01601] \text{ МэВ/нуклон} = 5,61 \text{ МэВ/нуклон}.$$

Пример 36. Определить энергию E , которую нужно затратить для отрыва нейтрона от ядра ${}^{23}_{11}\text{Na}$.

Решение. После отрыва нейтрона число нуклонов A в ядре уменьшится на единицу, а число протонов Z останется неизменным;

получится ядро ${}^{22}\text{Na}$. Ядро ${}^{23}\text{Na}$ можно рассматривать как устойчивую систему, образовавшуюся в результате захвата свободного нейтрона ядром ${}^{22}\text{Na}$. Энергия отрыва нейтрона от ядра ${}^{23}\text{Na}$ равна энергии связи нейтрона с ядром ${}^{22}\text{Na}$ ($E = E_{\text{св}}$).

Выразив энергию связи нейтрона через дефект массы системы, получим

$$E = E_{\text{св}} = c^2 \Delta m = c^2(m_{{}^{22}\text{Na}} + m_n - M_{{}^{23}\text{Na}})$$

При подстановке числовых значений заменяем массы ядер массами нейтральных атомов. Так как число электронов в оболочках атомов ${}^{23}\text{Na}$ и ${}^{22}\text{Na}$ одинаково, то разность масс атомов ${}^{23}\text{Na}$ и ${}^{22}\text{Na}$ от такой замены не изменится:

$$E = 931,4 \text{ МэВ/а. е. м.} \cdot 0,01334 \text{ а. е. м.} = 12,42 \text{ МэВ.}$$

После округления

$$E = 12,4 \text{ МэВ.}$$

Пример 37. Найти энергию реакции ${}^9_4\text{Be} + {}^1_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^6_3\text{Li}$ если известно, что кинетические энергии протона $T_{\text{H}} = 5,45 \text{ МэВ}$, ядра гелия $T_{\text{He}} = 4 \text{ МэВ}$ и что ядро гелия вылетело под углом 90° к направлению движения протона. Ядро-мишень ${}^9_4\text{Be}$ неподвижно.

Решение. Энергия реакции Q есть разность между суммой кинетических энергий ядер-продуктов реакции и кинетической энергией налетающего ядра:

$$Q = T_{\text{Li}} + T_{\text{He}} - T_{\text{H}} \quad (1)$$

В этом выражении неизвестна кинетическая энергия T_{Li} лития. Для ее определения воспользуемся законом сохранения импульса

$$p_{\text{H}} = p_{\text{He}} + p_{\text{Li}} \quad (2)$$

Векторы p_{H} и p_{He} , по условию задачи, взаимно перпендикулярны и, следовательно, вместе с вектором p_{Li} образуют прямоугольный треугольник. Поэтому

$$(p_{\text{H}})^2 = (p_{\text{He}})^2 + (p_{\text{Li}})^2 \quad (3)$$

Выразим в этом равенстве импульсы ядер через их кинетические энергии. Так как кинетические энергии ядер, по условию задачи, много меньше энергий покоя этих ядер (см. табл. 21), то можно воспользоваться классической формулой

$$p^2 = 2mT \quad (4)$$

Заменив в уравнении (3) квадраты импульсов ядер их выражениями (4), после упрощения получим

$$m_{\text{Li}} T_{\text{Li}} = m_{\text{He}} T_{\text{He}} + m_{\text{H}} T_{\text{H}}$$

откуда

$$T_{\text{Li}} = (m_{\text{He}} T_{\text{He}} + m_{\text{H}} T_{\text{H}}) / m_{\text{Li}} = 3,58 \text{ МэВ}$$

Подставив числовые значения в формулу (1), найдем

$$Q = T_{\text{Li}} + T_{\text{He}} - T_{\text{H}} = 2,13 \text{ МэВ.}$$

Пример 38. Решить задачу предыдущего примера, считая, что кинетические энергии и направления движения ядер неизвестны.

Решение. Применим закон сохранения релятивистской полной энергии

$$E_{\text{Be}} + E_{\text{H}} = E_{\text{He}} + E_{\text{Li}} \quad (1)$$

Релятивистская полная энергия ядра равна сумме энергии покоя и кинетической энергии:

$$E = mc^2 + T \quad (2)$$

В формуле (2) для упрощения записи масса покоя обозначена не через m_0 , а через m .

Так как ядро-мишень ${}^9\text{Be}$ неподвижно, то на основании формулы (2) уравнение (1) примет вид

$$m_{\text{Be}} c^2 + m_{\text{H}} c^2 + T_{\text{H}} = m_{\text{He}} c^2 + T_{\text{He}} + m_{\text{Li}} c^2 + T_{\text{Li}} \quad (3)$$

Определим энергию реакции:

$$Q = T_{\text{He}} + T_{\text{Li}} - T_{\text{H}} = c^2[(m_{\text{Be}} + m_{\text{H}}) - (m_{\text{He}} + m_{\text{Li}})]. \quad (4)$$

При числовом подсчете массы ядер заменим массами нейтральных атомов. Легко убедиться, что такая замена не повлияет на результат вычисления. В самом деле, так как масса m ядра равна разности между массой m_a нейтрального атома и массой Zm_e электронов, образующих электронную оболочку, то

$$Q = c^2 [(m_{\text{Be}} + 4m_e + m_{\text{H}} - m_e) - (m_{\text{He}} - 2m_e + m_{\text{Li}} - 3m_e)]. \quad (5)$$

Упростив уравнение (5), найдем

$$Q = c^2 [(m_{\text{Be}} + m_{\text{H}}) - (m_{\text{He}} + m_{\text{Li}})]. \quad (6)$$

Подставив числовые значения коэффициента пропорциональности c^2 (МэВ/а. е. м.) и масс нейтральных атомов (а. е. м.), получим

$$Q = 2,13 \text{ МэВ, что совпадает с результатом, полученным в примере 1.}$$

Пример 39. Радиоактивное ядро магния ${}^{23}\text{Mg}$ выбросило позитрон и нейтрино. Определить энергию Q β^+ -распада ядра.

Решение. Реакцию β^+ -распада ядра магния можно записать следующим образом:



Принимая, что ядро магния было неподвижным, и учитывая, что масса покоя нейтрино равна нулю, напишем уравнение энергетического баланса. На основании закона сохранения релятивистской полной энергии имеем

$$c^2 m_{\text{Mg}} = c^2 m_{\text{Na}} + T_{\text{Na}} + c^2 m_e + T_e + T_\nu \quad (1)$$

Энергия распада

$$Q = T_{\text{Na}} + T_e + T_\nu = c^2(m_{\text{Mg}} - m_{\text{Na}} - m_e). \quad (2)$$

Выразим массы ядер магния и натрия через массы соответствующих нейтральных атомов:

$$Q = c^2 [(m_{\text{Mg}} - 12m_e) - (m_{\text{Na}} - 11m_e) - m_e].$$

Так как массы покоя электрона и позитрона одинаковы, то после упрощений получим

$$Q = c^2(m_{\text{Mg}} - m_{\text{Na}} - 2m_e).$$

Сделав подстановку, найдем $Q=3,05$ МэВ.

Пример 40. Электрон, начальной скоростью которого можно пренебречь, прошел ускоряющую разность потенциалов U . Найти длину волны де Бройля λ для двух случаев: 1) $U_1 = 51$ кВ; 2) $U_2 = 510$ кВ.

Решение. Длина волны де Бройля λ частицы зависит от ее импульса p и определяется формулой

$$\lambda = 2\pi\hbar/p \quad (1)$$

Импульс частицы можно определить, если известна ее кинетическая энергия T . Связь импульса с кинетической энергией для нерелятивистского (когда $T \ll E_0$) и для релятивистского (когда $T \approx E_0$) случаев соответственно выражается формулами:

$$p = \sqrt{2m_0T}; \quad (2)$$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{(E_0 + T)^2 - E_0^2} \quad (3)$$

Формула (1) с учетом соотношений (2) и (3) запишется соответственно в нерелятивистском и релятивистском случаях:

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0T}}; \quad (4)$$

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{c^2(2E_0 + T)T}} \quad (5)$$

Сравним кинетические энергии электрона, прошедшего заданные в условии задачи разности потенциалов $U_1 = 51$ В и $U_2 = 510$ кВ, с энергией покоя электрона и в зависимости от этого решим вопрос, которую из формул (4) и (5) следует применить для вычисления длины волны де Бройля.

Как известно, кинетическая энергия электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов U ,

$$T = |e|U.$$

В первом случае $T_1 = |e|(U_1 = 51 \text{ эВ} = 0,51 \cdot 10^{-4} \text{ МэВ})$, что много меньше энергии покоя электрона $E_0 = m_0c^2 = 0,51$ МэВ. Следовательно, можно применить формулу (4).

Для упрощения расчетов заметим, что $T_1 = 10^{-4} m_0c^2$. Подставив это выражение в формулу (4), перепишем ее в виде

$$\lambda_1 = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2m_0 \cdot 10^{-4} m_0c^2}} = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \frac{2\pi\hbar}{m_0c}$$

Учтя, что $\left[\frac{2\pi\hbar}{m_0c} \right]$ есть комптоновская длина волны λ_C , получим

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \lambda_C.$$

Так как $\lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12}$ м, то

$$\lambda_1 = \frac{10^2}{\sqrt{2}} \cdot 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м} = 172 \text{ пм}$$

Во втором случае кинетическая энергия $T_2 = |e| U_2 = 510 \text{ кэВ} = 0,51 \text{ МэВ}$, т. е. равна энергии покоя электрона. Следовательно, необходимо применить релятивистскую формулу (5).

Учтя, что $T_2 = 0,51 \text{ МэВ} = mc^2$, по формуле (5) найдем

$$\lambda_2 = \frac{2\pi\hbar}{\frac{1}{c} \sqrt{(2m_0c^2 + m_0c^2)m_0c^2}} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3}m_0c}, \text{ или } \lambda_0 = \frac{\lambda_C}{\sqrt{3}}$$

Подставив значение λ_C в последнюю формулу и произведя вычисления, получим

$$\lambda_2 = 1,4 \text{ пм.}$$

Пример 41. На узкую щель шириной $a = 1$ мкм направлен параллельный пучок электронов, имеющих скорость $v = 3,65$ Мм/с. Учитывая волновые свойства электронов, определить расстояние x между двумя максимумами интенсивности первого порядка в дифракционной картине, полученной на экране, отстоящем на $L = 10$ см от щели.

Решение. Согласно гипотезе де Бройля, длина волны λ , соответствующая частице массой m , движущейся со скоростью, выражается формулой

$$\lambda = 2\pi\hbar/(mv). \quad (1)$$

Дифракционный максимум при дифракции на одной щели наблюдается при условии

$$\alpha \sin \varphi = (2k+1)(\lambda/2), \quad (2)$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ — порядковый номер максимумов; α — ширина щели.

Для максимумов первого порядка ($k=1$) угол φ заведомо мал, поэтому $\sin \varphi = \varphi$, и, следовательно, формула (2) примет вид

$$\alpha\varphi = \frac{3}{2}\lambda \quad (3)$$

а искомая величина x , как следует из рис. 45.1,

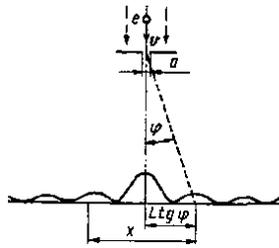


Рис.45.1

$$x = 2L \operatorname{tg} \varphi = 2L\varphi \quad (4)$$

так как $\operatorname{tg} \varphi = \varphi$

Подставив значение $\alpha\varphi$ из соотношения (3) в формулу (4), получим

$$x = 2L \frac{3\lambda}{2a} = 3 \frac{L\lambda}{a}$$

Подстановка в последнее равенство длины волны де Бройля по формуле (1) дает

$$x = 6 \frac{\pi\hbar L}{amv}$$

После вычисления по формуле (5) получим $x = 6 \cdot 10^{-41} = 60$ мкм.

Пример 42. На грань кристалла никеля падает параллельный пучок электронов. Кристалл поворачивают так, что угол скольжения θ изменяется. Когда этот угол делается равным 64° , наблюдается максимальное отражение электронов, соответствующее дифракционному максимуму первого порядка. Принимая расстояние d между атомными плоскостями кристалла равным 200 пм, определить длину волны де Бройля λ электронов и их скорость v .

Решение. К расчету дифракции электронов от кристаллической решетки применяется то же уравнение Вульфа — Брэгга, которое используется в случае рентгеновского излучения (см. § 31):

$$2d \sin \theta = k\lambda$$

где d — расстояние между атомными плоскостями кристалла; θ — угол скольжения; k — порядковый номер дифракционного максимума; λ — длина волны де Бройля. Очевидно, что

$$\lambda = (2d \sin \theta)/k$$

Подставив в эту формулу значения величин и вычислив, получим

$$\lambda = 360 \text{ пм.}$$

Из формулы длины волны де Бройля $\lambda = 2\pi\hbar/(mv)$ выразим скорость электрона:

$$v = 2\pi\hbar/(m\lambda)$$

Подставив в эту формулу значения π , \hbar , m (масса электрона), и произведя вычисления, найдем

$$v = 2 \text{ Мм/с.}$$

Пример 43. Кинетическая энергия T электрона в атоме водорода составляет величину порядка 10 эВ. Используя соотношение неопределенностей, оценить минимальные линейные размеры атома.

Решение. Неопределенность координаты и импульса электрона связаны соотношением

$$\Delta x \Delta p \geq \hbar \quad (1)$$

где Δx — неопределенность координаты электрона; Δp — неопределенность его импульса.

Из этого соотношения следует, что чем точнее определяется положение частицы в пространстве, тем более неопределенным становится импульс, а следовательно, и энергия частицы. Пусть атом имеет линейные размеры l , тогда электрон атома будет находиться где-то в пределах области с неопределенностью: $\Delta x = l/2$. Соотношение неопределенностей (1) можно записать в этом случае в виде $(l/2) \Delta p \geq \hbar$, откуда

$$l \geq 2\hbar / (\Delta p) \quad (2)$$

Физически разумная неопределенность импульса Δp , во всяком случае, не должна превышать значения самого импульса p , т. е.

$$\Delta p \leq p$$

Импульс p связан с кинетической энергией T соотношением $p = \sqrt{2mT}$. Заменяем Δp значением $\sqrt{2mT}$ (такая замена не увеличит l). Переходя от неравенства (2) к равенству, получим

$$l_{\min} = 2\hbar / \sqrt{2mT}$$

Подставив числовые значения и произведя вычисления, найдем $l_{\min} = 124$ пм.

Пример 44. Используя соотношение неопределенностей энергии и времени, определить естественную ширину $\Delta\lambda$ спектральной линии излучения атома при переходе его из возбужденного состояния в основное. Среднее время τ жизни атома в возбужденном состоянии принять равным 10^{-8} с, а длину волны λ излучения — равной 600 нм.

Решение. При переходе атомов из возбужденного состояния в основное существует некоторый разброс (неопределенность) в энергии испускаемых фотонов. Это связано с тем, что энергия возбужденного состояния не является точно определенной, а имеет конечную ширину Γ (рис. 45.2).

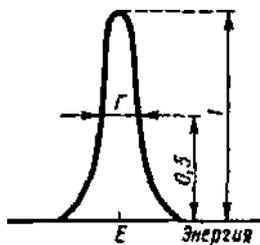


Рис.45.2

Согласно соотношению неопределенностей энергии и времени, ширина Γ энергетического уровня возбужденного состояния связана со средним временем τ жизни атомов в этом состоянии соотношением

$$\Gamma \tau \sim \hbar$$

Тогда ширина энергетического уровня определяется выражением

$$\Gamma = \hbar / \tau$$

Вследствие конечной ширины уровня энергии возбужденного состояния энергия фотонов, испускаемых атомами, также имеет разброс, равный ширине энергетического уровня, т. е.

$$\Delta \varepsilon = \Gamma$$

$$\Delta \varepsilon = \hbar / \tau \quad (1)$$

Поскольку энергия ε фотона связана с длиной волны λ соотношением

$$\varepsilon = 2\pi\hbar c / \lambda$$

то разбросу $\Delta \varepsilon$ ($\Delta \varepsilon \ll \varepsilon$) энергии соответствует разброс $\Delta \lambda$ длин волн ($\Delta \lambda \ll \lambda$)

$$\Delta \varepsilon = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda^2} \Delta \lambda \quad (2)$$

(знак минус опущен).

Входящий в это выражение конечный интервал длин волн $\Delta \lambda$ и есть естественная ширина спектральной линии. Выразив $\Delta \lambda$ из формулы (2) и заменив $\Delta \varepsilon$ согласно (1), получим

$$\Delta \lambda = \frac{\lambda^2}{2\pi c \tau}$$

Произведем вычисления:

$$\Delta \lambda = 2 \cdot 10^{-14} \text{ м} = 20 \text{ фм}$$

Пример 46. Определить число n узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной кубической решетке.

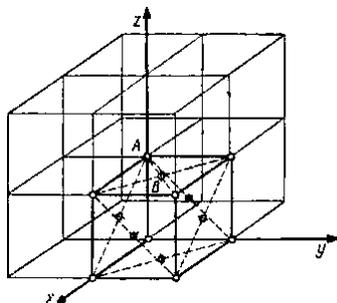


Рис.49.3

Решение. Выделим элементарную ячейку в кубической решетке (рис. 49.3) и определим, скольким соседним элементарным ячейкам принадлежит тот или иной узел выделенной ячейки. В этой ячейке имеются узлы двух типов: A (находящиеся в вершинах куба) и B (находящиеся на гранях куба в точке пересечения диагоналей).

Узел A принадлежит одновременно восьми элементарным ячейкам. Следовательно, в данную ячейку узел A входит с долей $1/8$. Узел B входит одновременно только в две ячейки и, следовательно, в данную ячейку узел B входит с долей $1/2$. Если учесть, что число узлов типа A в ячейке равно восьми, а число узлов типа B равно шести, т. е. числу граней, то общее число узлов, приходящихся на одну элементарную ячейку в гранецентрированной решетке,

$$n = (1/8) \cdot 8 + (1/2) \cdot 6 = 1 + 3 = 4 \text{ узла.}$$

Так как число узлов равно числу атомов, то в соответствующей структуре на элементарную ячейку приходится четыре атома.

Пример 47. Определить параметр a решетки и расстояние d между ближайшими соседними атомами кристалла кальция (решетка гранецентрированная кубической сингонии). Плотность ρ кристалла кальция равна $1,55 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Решение. Параметр a кубической решетки связан с объемом элементарной ячейки соотношением $V = a^3$. С другой стороны, объем элементарной ячейки равен отношению молярного объема к числу элементарных ячеек в одном моле кристалла: $V = V_m / Z_m$. Приравняв правые части приведенных выражений для V найдем

$$a^3 = V_m / Z_m \quad (1)$$

Молярный объем кальция $V_m = M / \rho$, где ρ — плотность кальция; M — его молярная масса. Число элементарных ячеек в одном моле

$$Z_m = N_A / n,$$

где n — число атомов, приходящихся на одну ячейку. Подставив в формулу (1) приведенные выражения для V_m и Z_m , получим

$$a^3 = nM/(\rho N_A)$$

Отсюда

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{nM}{\rho N_A}} \quad (2)$$

Подставим значения величин n , M , ρ и N_A в формулу (2), учитывая, что $n = 4$ (см. предыдущий пример). Произведя вычисления, найдем

$$a = 556 \text{ пм.}$$

Расстояние d между ближайшими соседними атомами находится из простых геометрических соображений, ясных из рис.

$$49.4: d = a/\sqrt{2}$$

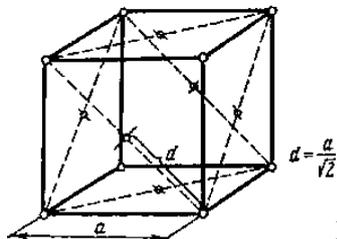


Рис.49.4

Подставив в это выражение найденное ранее значение a , получим $d=393$ пм.

Пример 48. Написать индексы направления прямой, проходящей через узлы $[[100]]$ и $[[001]]$ кубической примитивной решетки.

Решение. Эту задачу можно решить двумя способами.

1-й способ. Изобразим кубическую примитивную ячейку, отметим на ней узлы с индексами $[[100]]$ и $[[001]]$ и проведем через эти узлы прямую (рис. 49.5, а)

Если бы прямая проходила через начало координат, то индексы ее направления совпадали бы с индексами узла, ближайшего к началу координат, через который проходит прямая.

Заданная прямая не проходит через начало координат. Но этого можно достигнуть, перенеся начало координат в один из узлов, через которые проходит прямая.

Если перенести начало координат в узел $[[100]]$ (рис. 49.5, б), то узел, лежащий на той же прямой и ближайший к выбранному началу координат, будет иметь индексы $[[101]]$, а искомое направление в этом случае определится индексами $[101]$.

Если же начало координат перенести в узел $[[001]]$ (рис. 49.5, в), то соответственно индексы искомого направления будут $[011]$. Итак, индексы искомого направления в кристалле $[101]$ или $[011]$.

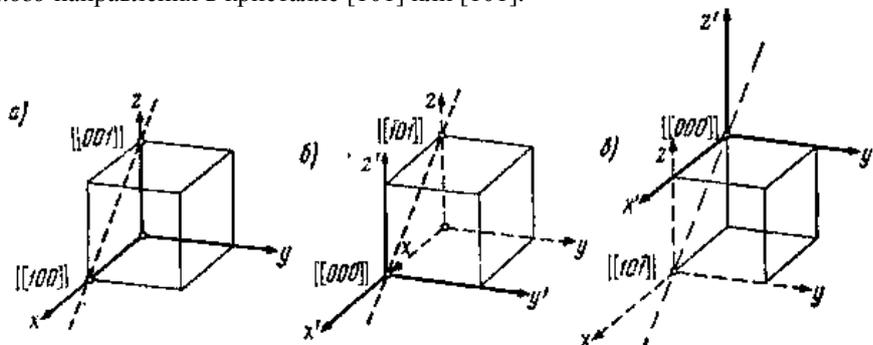


Рис.49.5

2-й способ. Не всегда бывает легко определить, как изменятся индексы узлов при переносе начала координат. Поэтому рассмотрим аналитический метод решения.

Напишем в общем виде уравнение прямой, проходящей через две точки в пространстве, с индексами узлов $[[m_1n_1p_1]]$ и $[[m_2n_2p_2]]$:

$$\frac{x - m_1}{m_2 - m_1} = \frac{y - n_1}{n_2 - n_1} = \frac{z - p_1}{p_2 - p_1}$$

Величины, стоящие в знаменателе, пропорциональны направляющим косинусам прямой. Но так как эти величины целочисленны, то они и будут являться индексами направления.

Подставив в знаменатель выражения (1) значения индексов узлов $m_1=1, n_1=0, p_1=0$ и $m_2=0, n_2=0, p_2=1$, получим:

$$m_2 - m_1 = 0 - 1 = -1$$

$$n_2 - n_1 = 0 - 0 = 0$$

$$p_2 - p_1 = 1 - 0 = 1$$

Таким образом, искомые индексы направления $[101]$.

Пример 49. Написать индексы Миллера для плоскости, содержащей узлы с индексами $[[200]]$, $[[010]]$ и $[[001]]$. Решетка кубическая, примитивная.

Решение. Возможны два способа решения задачи.

1-й способ применим в тех случаях, когда узлы, принадлежащие плоскости, лежат одновременно и на осях координат (т. е. известны отрезки, отсекаемые плоскостью на осях координат).

В данном случае узлы, принадлежащие плоскости, лежат на осях координат, и отрезки (в единицах постоянной решетки), отсекаемые на осях координат этой плоскостью, соответственно будут (рис. 49.6) 2, 1, 1.

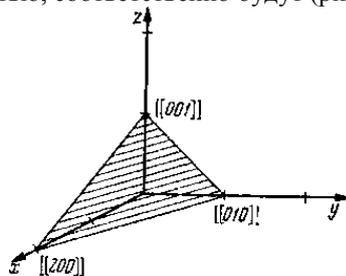


Рис.49.6

В соответствии с общим правилом нахождения индексов Миллера напишем обратные значения, полученных чисел $\frac{1}{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}$ и приведем их к наименьшему целому кратному этих чисел. Для этого умножим числа на два. Полученная совокупность значений, заключенная в круглые скобки, и есть искомые индексы Миллера (1, 2, 2).

2-й способ (аналитический) особенно удобен тогда, когда известные узлы не лежат на осях координат. Этот способ является общим и применим во всех случаях.

Известно, что индексы Миллера равны наименьшим целочисленным коэффициентам при переменных в уравнении плоскости. Поэтому решение задачи по определению индексов Миллера сводится, по существу, к отысканию уравнения плоскости.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки с координатами $[[m_1 n_1 p_1]], [[m_2 n_2 p_2]], [[m_3 n_3 p_3]]$, дается определителем третьего порядка

$$\begin{vmatrix} x - m_1 & y - n_1 & z - p_1 \\ m_2 - m_1 & n_2 - n_1 & p_2 - p_1 \\ m_3 - m_1 & n_3 - n_1 & p_3 - p_1 \end{vmatrix} = 0$$

В нашем случае: $m_1=2, n_1=0, p_1=0, m_2=0, n_2=1, p_2=0, m_3=0, n_3=0, p_3=0$ Подставляя значения индексов узлов в определитель, получим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 0-2 & 1-0 & 0-0 \\ 0-2 & 0-0 & 1-0 \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Разложим этот определитель по элементам первой строки:

$$x-2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая определитель второго порядка, получим $(x-2)(+1) - y(-2) + z(+2) = 0$, или $x+2y+2z=2$.

Выписав коэффициенты при x, y, z и заключив их в круглые скобки, получим индексы Миллера (1,2,2).

Пример 50. Дебаевская температура кристалла равна 150 К. Определить максимальную частоту колебаний кристаллической решетки. Сколько фононов такой частоты возбуждается в среднем в кристалле при температуре 300 К?

Решение: Дебаевская температура:

$$\theta_D = \frac{h\nu_{\max}}{k}, \quad (1)$$

где ν_{\max} – максимальная частота колебаний кристаллической решетки, h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана. Из (1) найдём:

$$\nu_{\max} = \frac{k\theta_D}{h}. \quad (2)$$

Подставляя в (2) числовые значения, найдём:

$$\nu_{\max} = \frac{1,38 \times 10^{-23} \text{ Дж/К} \times 150 \text{ К}}{6,62 \times 10^{-34} \text{ Дж} \times \text{с}} = 3,12 \times 10^{12} \text{ Гц.}$$

Среднее число фононов с энергией ε_i :

$$\langle N_i \rangle = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_i}{kT}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (3)$$

где T – температура кристалла. Энергия фонона, соответствующая частоте колебаний ν_{\max} , равна:

$$\varepsilon_i = h\nu_{\max} = k\theta_D. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), находим:

$$\langle N_i \rangle = \left[\exp\left(\frac{\theta_D}{T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad \langle N_i \rangle = \left[\exp\left(\frac{150\text{K}}{300\text{K}}\right) - 1 \right]^{-1} = 1,54.$$

Ответ: $3,12 \times 10^{12}$ Гц; 1,54.