6. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

§ 6.1 Основные понятия и определения

Электростатикой называется раздел физики, изучающий взаимодействие неподвижных электрических зарядов и характеристики их электрических полей.

Электрическим полем называется особый вид материи, не воспринимаемый органами чувств человека и оказывающий силовое воздействие на заряженные частицы и тела.
Источником электрического поля являются электрические заряды.

Электрический заряд – физическая величина, определяющая силу электромагнитного взаимодействия.

В природе существует два типа зарядов: *положительные* и *отрицательные*.
Одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые – притягиваются.

Минимальным положительным зарядом обладает ***протон***. Минимальным отрицательным – ***электрон***.

Электрический заряд любого тела дискретен, то есть составляет целое кратное от элементарного электрического заряда $e = 1.6 \cdot 10^{-19}\,Кл$, то есть $q = N\,e$,
где N - число не скомпенсированных зарядов.

Точечным называется заряд, размером которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

§ 6.2 Основные характеристики электростатического поля

Электростатическим называется электрическое поле, характеристики которого не изменяются с течением времени (такое поле создаётся неподвижными электрическими зарядами).

- Напряженность электрического поля $\vec{E}$ - это силовая характеристика электростатического поля (векторная величина, определяющая силу, действующую на произвольный точечный заряд q в данной точке электрического поля).

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}, \qquad (6.1)$$

$$E = \left[\frac{Н}{Кл}\right] \equiv \left[\frac{В}{м}\right],$$

(пример: $E = 10\,\frac{Н}{Кл}$ означает, что на точечный заряд в 1 Кл в данной точке поля действует сила, равная 10 Н).

Из уравнения (6.1) следует, что $\vec{F} = q\vec{E}$ - сила, действующая на заряд q в данной точке поля.

- Потенциал электростатического поля φ – это энергетическая характеристика электростатического поля (скалярная величина, определяющая потенциальную энергию произвольного точечного заряда в данной точке электрического поля).

$$\varphi = \frac{П}{q}, \qquad (6.2)$$

$$\varphi = \left[\frac{Дж}{Кл}\right] = В$$, Вольт

(пример: φ = 10 В означает, что точечный заряд в 1 Кл в данной точке электрического поля имеет потенциальную энергию, равную 1 Дж).

Из уравнения (6.2) следует, что $П = q\,\varphi$ - потенциальная энергия заряда в данной точке поля.

- **Вектор электрической индукции $\vec{D}$** (является вспомогательной характеристикой электрического поля)

Вектор напряжённости $\vec{E}$**,** переходя через границу диэлектрика, претерпевает скачкообразные изменения, создавая тем самым неудобства при расчётах электрических полей. Для их упрощения был введён **вектор электрической индукции $\vec{D}$** :

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E},$$

где $\varepsilon = \dfrac{E_{в\,вакууме}}{E_{в\,веществе}} = \dfrac{F_{в\,вакууме}}{F_{в\,веществе}}$ -***диэлектрическая проницаемость вещества*** (она показывает во сколько раз напряжённость электрического поля в вакууме больше, чем напряжённость электрического поля в данном веществе), ε =*безразмерная*,

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\dfrac{Ф}{м}$ - ***электрическая постоянная***.

- **Поток вектора $\vec{E}$ электрического поля Ф** равен $Ф = \int\limits_S \vec{E}d\vec{s}$.

Для однородного электрического поля в случае плоской поверхности поток равен величине $Ф = EScos\alpha$, где α - угол между вектором $\vec{E}$ и вектором нормали к данной поверхности.

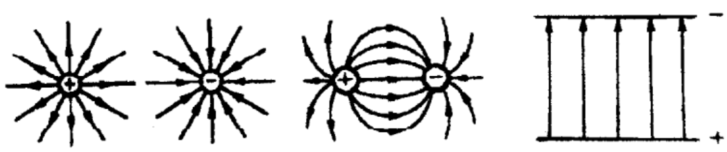
§ 6.3 Графическое изображение электростатического поля

Электростатические поля можно изображать:
1. с помощью *силовых линий,*
2. с помощью *эквипотенциалей.*

Силовой линией электрического поля *называется линия, касательная в каждой точке которой совпадает по направлению с вектором* $\vec{E}$ *в данной точке поля* (см. рис. 6.1).
(за направление вектора $\vec{E}$ приняли направление, совпадающее с вектором силы $\vec{F}$, действующей на положительный точечный заряд в данной точке поля).

Рис. 6.1

Силовые линии могут иметь вид прямых или кривых произвольной формы. Через каждую точку пространства проходит только одна силовая линия. Условно принято, что силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах, то есть силовые линии электростатического поля незамкнуты.
На рис. 6.2 представлены силовые линии уединённых положительного и отрицательного точечных зарядов, а так же поле электрического диполя и поле внутри плоского конденсатора.



Поле уединённых точечных зарядов

Поле диполя

Поле плоского конденсатора

Рис. 6.2

***Эквипотенциалью** называется геометрическое место точек с одинаковым потенциалом.* На рис. 6.3 представлены эквипотенциальные линии уединённых положительного и отрицательного точечных зарядов, а так же электрического диполя и поля внутри плоского конденсатора .

Рис. 6.3

Эквипотенциали обычно проводят так, чтобы разность потенциалов между соседними поверхностями была одинаковой, тогда по густоте эквипотенциальных поверхностей можно наглядно судить о значении напряженности поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, там напряженность поля больше.

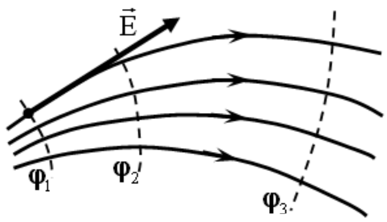


Рис. 6.4

В качестве примера на рис. 6.4 приведено двумерное изображение электростатического поля.

Принято, что:

1. силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных,
2. силовые линии нигде не пересекаются и направлены в сторону уменьшения потенциала.
3. силовые линии всегда перпендикулярны к эквипотенциальным линиям.

***Однородным** называется электростатическое поле, в каждой точке которого вектор напряжённости $\vec{E}$ имеет одно и то же направление и величину.*

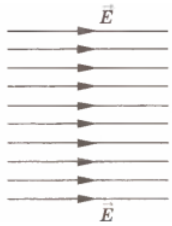


Рис. 6.5

Однородное электростатическое поле графически изображается параллельными силовыми линиями, расположенными на одинаковом расстоянии друг от друга (см. рис. 6.5).

Потенциал электростатического поля связан с напряженностью соотношением

$$\vec{E} = -\frac{d\varphi}{d\vec{r}} = -grad\varphi \ ,$$

где $\dfrac{d\varphi}{d\vec{r}} = grad\varphi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$.

В случае однородного поля $$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d},$$

где d – расстояние между двумя точками с потенциалами φ_1 и φ_2 .

Напряжённость электрического поля точечного заряда

$$E = k\frac{q}{\varepsilon r^2} \ ,$$

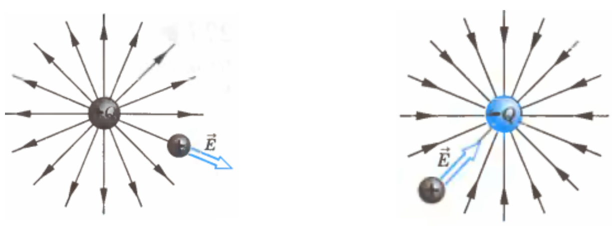


Рис. 6.6

Потенциал электрического поля точечного заряда.

$$\varphi = k\frac{q}{\varepsilon r}.$$

Принцип суперпозиции для электростатического поля

(позволяет рассчитать характеристики электростатического поля системы точечных зарядов)

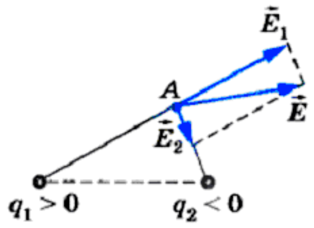


Рис. 6.7

Результирующая напряженность электрического поля $\vec{E}_{рез}$ ***системы точечных зарядов*** *равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым из имеющихся зарядов*:

$$\vec{E}_{рез} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \ldots + \vec{E}_n = \sum \vec{E}_i \ .$$

Результирующий потенциал электрического поля $\varphi_{рез}$ ***системы точечных зарядов*** *равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из имеющихся зарядов*:

$$\varphi_{рез} = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum \varphi_i \,.$$

§ 6.4 Основные законы электростатики

Электрически изолированной *называется система, которая не обменивается с внешними телами электрическим зарядом.*

Для такой системы справедлив ***закон сохранения электрического заряда***:
Алгебраическая сумма электрических зарядов электрически изолированной системы не изменяется при любых процессах, происходящих в этой системе, то есть

$$\sum q_i = const \qquad \text{или} \qquad \left(\sum q_i\right)_{начальное} = \left(\sum q_i\right)_{конечное}$$

Отдельные слагаемые этой суммы положительны, другие – отрицательны. На основании этого закона объясняется широкий круг явлений, получивших название электризации тел.

Закон Кулона

(позволяет определить силу электростатического взаимодействия между двумя точечными зарядами)

Сила взаимодействия между двумя точечными зарядами прямо пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена по прямой, соединяющий эти заряды:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q_1 q_2|}{\varepsilon r^2} = k\frac{|q_1 q_2|}{\varepsilon r^2},$$

где $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\cdot 10^9 \dfrac{Нм^2}{Кл^2}$,

$\boldsymbol{\varepsilon}$ - диэлектрическая проницаемость вещества,

$\boldsymbol{\varepsilon_0}$ – электрическая постоянная.

Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме

Поток вектора напряженности $\vec{E}$ через любую замкнутую поверхность, прямо пропорционален алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности

$$\Phi = \oint_s \vec{E} d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i \ .$$

Теорема Гаусса для электрического поля в веществе

Поток вектора электрической индукции $\vec{D}$ через любую замкнутую поверхность, равен алгебраической сумме свободных зарядов, находящихся внутри этой поверхности

$$\Phi = \oint_s \vec{D} d\vec{S} = \sum q_{i_{своб}} \ .$$

§ 6.5 Расчёт характеристик электростатических полей

Расчёт электрического поля состоит в определении всех величин, характеризующих это поле. Расчёт проводится двумя способами:

1. с применением закона Кулона и принципа суперпозиции для электрического поля,
2. с помощью теоремы Гаусса.

Используя эти способы можно получить:

1. Напряжённость электрического поля равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ бесконечной плоскости

$$E = \frac{1}{2}\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0},$$

где $\sigma = \dfrac{\Delta q}{\Delta S}$ - поверхностная плотность электрического заряда.

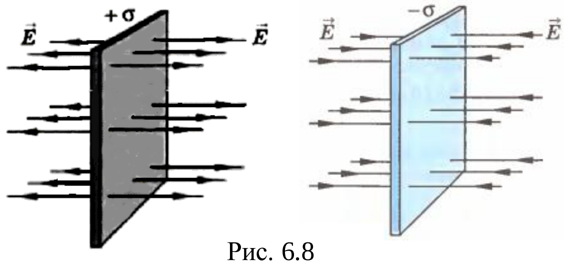


Рис. 6.8

2. Напряжённость электрического поля между двумя параллельными бесконечными разноимённо заряженными плоскостями с поверхностными плотностями зарядов **+ *σ*** и **– *σ*** (поле плоского конденсатора)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

3. Напряжённость электрического поля равномерно заряженной с поверхностной плотностью зарядов ***σ*** сферы (или шара):

- если $r < R$, то $E = 0$ (то есть внутри сферы или шара электрического поля нет),
- если $r = R$, то $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q|}{\varepsilon R^2} = k\dfrac{|q|}{\varepsilon R^2}$,
- если $r > R$, то $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q|}{\varepsilon r^2} = k\dfrac{|q|}{\varepsilon r^2}$,

где r - расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки, м,
R - радиус сферы или шара, м.

4. Напряжённость электрического поля бесконечного равномерно заряженного с линейной плотностью зарядов ***τ*** цилиндра:

- если $r < R$, то $E = 0$ (то есть внутри цилиндра электрического поля нет),
- если $r = R$, то $E = k\dfrac{2\tau}{\varepsilon R}$,
- если $r > R$, то $E = k\dfrac{2\tau}{\varepsilon r}$

где r - расстояние от центра сферы до рассматриваемой точки, м.
R - радиус сферы или шара, м.

5. Напряжённость электрического поля бесконечной равномерно заряженной с линейной плотностью зарядов τ нити.

$$E = k\frac{2\tau}{\varepsilon r},$$

где r - расстояние от нити до рассматриваемой точки, в метрах.

§ 6.6 Электрический диполь

Диполем *называется система, состоящая из двух одинаковых по величине и противоположных по знаку зарядов.*

Плечом диполя $\vec{l}$ *называется вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному.*

Электрический момент диполя определяется по формуле

$$\vec{p} = q\vec{l}, \qquad p = Кл\cdot м$$

где $\vec{l}$ - плечо диполя, м.

Точечным называется диполь, расстояние от центра которого до рассматриваемой точки много больше плеча диполя.

Напряженность поля точечного диполя:

а) в общем случае $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{\varepsilon r^3}\sqrt{3\cos\alpha + 1}$,

где p – электрический дипольный момент,

α - угол между радиус-вектором $\vec{r}$ и вектором $\vec{p}$.

б) на оси диполя $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{2p}{\varepsilon r^3}$,

в) на перпендикуляре к оси диполя $E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{\varepsilon r^3}$.

Потенциал поля точечного диполя:

а) в общем случае $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{\varepsilon r^2}\cos\alpha$,

б) на оси диполя $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{p}{\varepsilon r^2}$,

в) на перпендикуляре к оси диполя $\varphi = 0$.

§ 6.7 Работа силы электростатического поля

Из механики известно, что работа силы определяется по формуле:

$$A = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r}.$$

Подставляя в эту формулу закон Кулона, и интегрируя это выражение, получим формулу работы по перемещению точечного заряда в электрическом поле:

$$A = \int_{r_1}^{r_2}\vec{F}d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2}k\frac{|q_1q_2|}{\varepsilon r^2}dr = k\frac{q_1q_2}{\varepsilon}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = -\left(k\frac{q_1q_2}{\varepsilon r_2} - k\frac{q_1q_2}{\varepsilon r_1}\right). \qquad (6.3)$$

Можно доказать, что работа сил электростатического поля не зависит от формы траектории, по которой перемещается заряд, а определяется лишь начальным и конечным положением заряда в поле. Силы, обладающие таким свойством называются

консервативными. Таким образом, силы электростатического поля являются консервативными.

Из уравнения (6.3) видно, что работа сил электростатического поля равна разности какой-то величины. Эту величину назвали ***потенциальной энергией электростатического взаимодействия двух точечных зарядов***:

$$П = k\frac{q_1 q_2}{\varepsilon r}.$$

Потенциальную энергию электростатического взаимодействия системы точечных зарядов можно определить по формуле:

$$П = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i ,$$

где φ_i - потенциал, создаваемый в точке, где находится заряд q_i всеми зарядами системы, кроме ***i***-го (определяется по принципу суперпозиции).

Работа сил электростатического поля по перемещению точечного заряда

$$A_{ЭП} = q\ \varphi_{начальный} - \varphi_{конечный} ,$$

$$A_{ЭП} = -\ П_{начальная} - П_{конечная} ,$$

$$A_{ЭП} = qES\cos\alpha ,$$

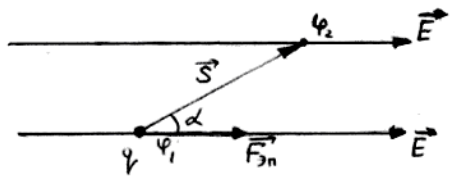


Рис. 6.9

где $\varphi_{начальный}$ и $\varphi_{конечный}$ - начальный и конечный потенциал электрического поля, $В$,

$П_{начальная}$ и $П_{конечная}$ - начальная и конечная потенциальная энергия заряда в электрическом поле, $Дж$,

$\vec{S}$ - вектор перемещения точечного заряда, $м$

$\vec{E}$ - вектор напряжённости электрического поля,

cos α – угол между векторами $\vec{E}$ и $\vec{S}$.

§ 6.8 Электрическая ёмкость. Конденсаторы

6.8.1 Ёмкость уединённого проводника

Уединенным проводник*ом называется проводник, на который не влияют другие заряженные тела*

Ёмкостью проводника *называется скалярная величина, равная отношению заряда проводника* q *к его потенциалу* φ:

$$C = \frac{q}{\varphi}, \qquad C = Ф, \text{ фарад.}$$

Ёмкость уединённого проводника зависит от геометрических размеров проводника, среды в котором он находится, от наличия других проводников вокруг него и не зависит от материала проводника.

6.8.2 Электрическая ёмкость уединенной проводящей сферы.

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 R ,$$

где R – радиус сферы.

6.8.3 Конденсаторы

Конденсатором *называется устройство для накопления электрического заряда.*

Ёмкостью конденсатора *называется скалярная величина, равная отношению заряда положительной обкладки конденсатора* q *к напряжению на его обкладках* U :

$$C = \frac{q}{U}.$$

В промышленности в основном используются три вида конденсаторов:
плоский, сферический и цилиндрический.

1. **Электрическая емкость плоского конденсатора** (состоит из двух близко расположенных параллельных пластин, пространство между которыми заполнено диэлектриком)

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d},$$

где S - площадь одной пластины конденсатора;
d - расстояние между пластинами конденсатора.

2. **Электрическая ёмкость сферического конденсатора** (состоит из двух концентрических сфер радиусами R_1 и R_2 , пространство между которыми заполнено диэлектриком)

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

3. **Электрическая ёмкость цилиндрического конденсатора** (состоит из двух коаксиальных цилиндров длиной l и радиусами R_1 и R_2, пространство между которыми заполнено диэлектриком)

$$C = 2\pi\varepsilon\varepsilon_0 \frac{l}{ln\frac{R_2}{R_1}}.$$

4. **Электрическая емкость последовательно соединенных конденсаторов**

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i},$$

где n – число конденсаторов,
а) для двух конденсаторов

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2},$$

б) для n одинаковых конденсаторов

$$C = \frac{C_1}{n}.$$

Последовательное соединение конденсаторов

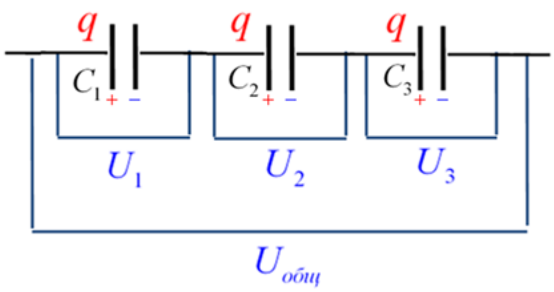


Рис. 7.6

$$\begin{cases} \dfrac{1}{C_{общ}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \ldots \dfrac{1}{C_n} \\ U_{общ} = U_1 + U_2 + \ldots + U_n \\ q_{общ} = q_1 = q_2 = \ldots = q_n \\ C_i = \dfrac{q_i}{U_i} \qquad C_{общ} = \dfrac{q_{общ}}{U_{общ}} \end{cases}$$

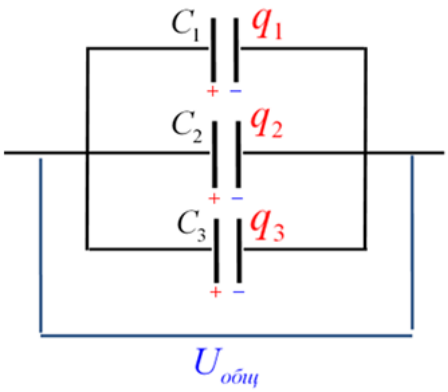
5. **Электрическая емкость параллельно соединенных конденсаторов**

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n,$$

в случае n одинаковых конденсаторов

$$C = nC_1.$$

Параллельное соединение конденсаторов



$$\begin{cases} C_{общ} = C_1 + C_2 + \ldots + C_n \\ U_{общ} = U_1 = U_2 = \ldots = U_n \\ q_{общ} = q_1 + q_2 + \ldots + q_n \\ C_i = \dfrac{q_i}{U_i} \qquad C_{общ} = \dfrac{q_{общ}}{U_{общ}} \end{cases}$$

Рис. 7.7

7. **Энергия электрического поля заряженного конденсатора**

$$W = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{qU}{2}$$

8. **Объемная плотность энергии электрического поля**

$$\omega = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}, \qquad \omega = \frac{Дж}{м^3},$$

где $\boldsymbol{D}$ – электрическое смещение, $\boldsymbol{E}$ – напряженность электрического поля.

Вопросы для самопроверки

1. Электрическое поле, его основные свойства и характеристики. Электростатическое поле.
2. Графическое изображение электростатического поля: силовые линии и эквипотенциали.
3. Точечный электрический заряд. Напряженность и потенциал неподвижного точечного заряда. Закон Кулона. Принцип суперпозиции для электростатических полей.
4. Потенциальная энергия электростатического взаимодействия точечных зарядов. Работа электростатического поля по перемещению точечного заряда.
5. Теорема Гаусса для электростатического поля неподвижных зарядов в вакууме и в веществе.
6. Электрический диполь. Напряженность и потенциал точечного диполя.
7. Электроемкость уединенного проводника и конденсатора. Виды конденсаторов. Формулы для расчета электроемкости плоского, цилиндрического и сферического конденсаторов. Виды соединения конденсаторов. Формулы для определения емкости батареи конденсаторов.
8. Энергия электрического поля уединенного проводника и конденсатора. Объемная плотность энергии электрического поля.

§ 6.9 Примеры решения задач

Пример 6.1 Электрическое поле создано двумя параллельными бесконечными заряженными плоскостями с поверхностными плотностями зарядов $\sigma_1 = 0,4\,мкКл/м^2$ и $\sigma_2 = 0,1\,мкКл/м^2$. Определить напряженность электрического поля, созданного этими заряженными плоскостями.

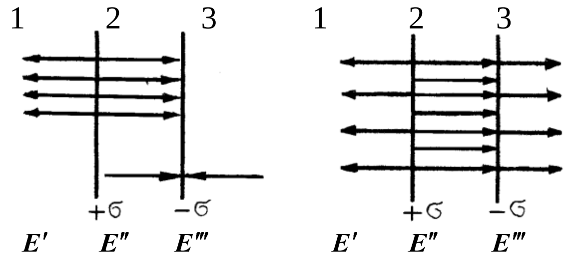
Решение:

Согласно принципу суперпозиции поля, создаваемые каждой заряженной плоскостью в отдельности, накладываются друг на друга, причем каждая заряженная плоскость создает электрическое поле независимо от присутствия от другой заряженной плоскости.

Напряженности однородных электрических полей создаваемых первой и второй плоскостями соответственно равны:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}; \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}.$$

Плоскости делят все пространство на три области: 1, 2, 3.



Как видно из рисунка, в области 1 и 3 электрические силовые лини обоих полей направлены в одну сторону и, следовательно, напряженности суммарных полей E' и E''' в области 1 и 3 равны между собой и равны сумме напряженности полей, создаваемых первой и второй плоскостями:

$$E' = E''' = E_1 + E_2 \text{ , или } E' = E''' = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2\varepsilon_0}$$

В области 2 (между плоскостями) электрические силовые линии полей направлены в противоположные стороны и, следовательно, напряженность поля E'' равна разности напряженностей полей, создаваемых 1 и 2 плоскостями.

$$E'' = \left|E_1 - E_2\right|, \text{ или } E'' = \left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\varepsilon_0}\right|.$$

Подставим данные, произведем вычисления, получим:

$$E' = E''' = \frac{0,4 + 0,1\ \cdot 10^{-6}}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}\ \frac{В}{м} = 28,3\frac{кВ}{м}, \qquad E'' = \left|\frac{0,4 - 0,1\ \cdot 10^{-6}}{2\cdot 8,85\cdot 10^{-12}}\ \frac{В}{м}\right| = 17\frac{кВ}{м}.$$

Ответ: $E' = E''' = 28,3\dfrac{кВ}{м}$, $E'' = 17\dfrac{кВ}{м}$.

Пример 6.2 Точечный заряд q = 25 нКл находиться в поле, созданном прямым бесконечным цилиндром радиусом R = 1 см, равномерно заряженным с поверхностной плотностью τ = 2 нКл/м^2 . Определить силу, действующую на заряд, помещенный от оси цилиндра на расстояние r =10 см.

Решение:

Силу, действующую на заряд в произвольной точке поля, найдём по формуле $F = qE$, где E – напряженность поля в точке, в которой находиться заряд.

Как известно напряженность поля бесконечно длинного равномерно заряженного цилиндра равна:

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},$$

где τ – линейная плотность заряда.

Выразим линейную плотность через поверхностную плотность. Для этого выделим элемент цилиндра длинной l и выразим находящийся на нем заряд двумя способами: $q = \sigma S = \sigma 2\pi Rl$ и $q = \tau l$

Приравняв эти выражения, получим: $\sigma 2\pi Rl = \tau l$

После сокращения найдем $\tau = \sigma 2\pi R$, тогда

$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma 2\pi R}{r} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$ и, следовательно, $F = q\frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}$.

Подставив числовые значения, получим:

$$F = 25\cdot 10^{-9}\,\frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 10^{-2}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 10^{-1}}\; H = 565\cdot 10^{-9}\; H = 565\,нH .$$

Направление силы совпадает с направлением вектора напряженности, а последний в силу симметрии (цилиндр бесконечной длинный) направлен перпендикулярно оси цилиндра.

Ответ: $F = 565 нH$.

Пример 6.3 Положительные заряды q_1=3 мкКл и q_2=0,02 мкКл находятся в вакууме на расстоянии r_1=1,5 м друг от друга. Определить минимальную работу, которую надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния r_2=1 м.

Решение:

Положим, что первый заряд остается неподвижным, а второй под действием внешних сил перемещается в поле, созданном первым зарядом, приближаясь к нему с расстояния 1,5 м до 1 м.

Работа $\boldsymbol{A'}$ внешней силы по перемещению заряда из одной точки поля в другую равна по модулю и противоположна по знаку работе $\boldsymbol{A}$ сил поля по перемещению заряда между теми же точками: $A' = -A$.

Работа $\boldsymbol{A}$ сил поля по перемещению заряда можно найти по формуле $A = q\ \ \varphi_1 - \varphi_2$.

Тогда работа $\boldsymbol{A'}$ внешних сил равна

$$A' = -\,q\ \ \varphi_1 - \varphi_2\ \ = q\ \ \varphi_2 - \varphi_1\ . \qquad (1)$$

Потенциалы точек начала и конца пути определим по формулам

$$\varphi_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{\varepsilon r_1}, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{\varepsilon r_2}.$$

Подставляя в (1), получим:

$$A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\varepsilon}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 180\ мкДж\ .$$

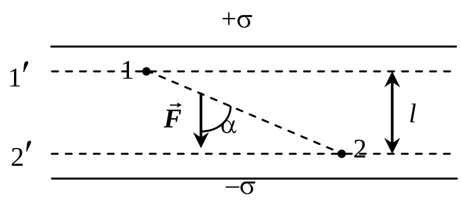
Ответ: $A = 180\ мкДж$.

Пример 6.4 Найти работу A поля по перемещению заряда q= 10 нКл из точки 1 в точку 2, находящиеся между двумя разноименно заряженными с поверхностной плотностью σ = 0,4 мкКл/м^2 бесконечными параллельными плоскостями, расстояние между которыми l = 3см.

Решение:

Работу сил поля по перемещению заряда из точки 1 поля с потенциалом φ_1 в точку 2 поля с потенциалом φ_2 найдем по формуле:

$$A = q\ \ \varphi_1 - \varphi_2$$



Для определения потенциалов в точках 1 и 2 проведем через эти точки эквипотенциальные поверхности 1$'$ и 2$'$. Эти поверхности будут плоскостями, так как поле между двумя равномерно заряженными бесконечными параллельными плоскостями однородно. Для такого поля справедливо соотношение

$$\varphi_1 - \varphi_2 = El\,,$$

где E - напряженность поля, l – расстояние между эквипотенциальными плоскостями.

Напряженность поля между параллельными бесконечными плоскостями равна $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}$, тогда

$$A = q\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}l\,.$$

Подставив значения, получим:

$$A = 10\cdot 10^{-9}\ \frac{0{,}4\cdot 10^{-6}}{1\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}}0.03\,Дж = 13{,}6\cdot 10^{-6}\,Дж = 13{,}6\,мкДж\,.$$

Ответ: $A = 13{,}6\,мкДж$.

Пример 6.5 Шарик массой $m = 49\,мг$, заряженный положительный зарядом $q_1 = 10^{-9}\,Кл$, движется со скоростью $v = 0{,}1\,м/с$. На какое расстояние может приблизиться шарик к положительному точечному заряду, равному $q_2 = 4\cdot 10^{-9}\,Кл$. Силой тяжести пренебречь.

Решение:

Для решения задачи рассмотрим механическую систему, состоящую из двух зарядов. Так как внутри этой системы действует только консервативная сила Кулона, а внешние силы не действуют, то в этой системе будет выполняться закон сохранения полной механической энергии. Из анализа этого закона следует, что при взаимном сближении зарядов, кинетическая. энергия системы переходит в потенциальную энергию электростатического взаимодействия зарядов, то есть:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{\varepsilon r}\text{, отсюда } r = \frac{2q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon\ mv^2}$$

Подставляя числовые значения, получим:

$$r = \frac{2\cdot 10^{-9}\cdot 4\cdot 10^{-9}}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1\cdot 49\cdot 10^{-6}\cdot 10^{-2}}\,м = 1{,}47\cdot 10^{-2}\,м = 1{,}47\,с\,.$$

Ответ: $r = 1{,}47\,см$.

Пример 6.6 Определите электрическую ёмкость плоского конденсатора с двумя слоями диэлектриков: фарфора толщиной $d_1 = 2$ мм и эбонита толщиной $d_2 = 1{,}5$ мм, если площадь пластин равна $S=100$ см^2. Для фарфора $\varepsilon_1 = 5$, а для эбонита $\varepsilon_2 = 3$.

Решение:

По определению ёмкость конденсатора равна $C = \dfrac{q}{U}$,

где q – заряд на пластинах конденсатора, U – напряжение на конденсаторе.

Такой конденсатор с двумя слоями диэлектрика можно рассматривать как систему, состоящую из двух последовательно соединённых конденсаторов.

В этом случае напряжение на конденсаторе будет равна сумме падений напряжений $U_1 + U_2$ на слоях диэлектриков, то есть можно записать:

$$C = \frac{q}{U_1 + U_2} . \quad (1)$$

Приняв во внимание, что

$$q = \sigma S , \quad (2)$$

$$U_1 = E_1 d_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_1 \varepsilon_0} d_1 , \quad (3)$$

$$U_2 = E_2 d_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_2 \varepsilon_0} d_2 , \quad (4)$$

где σ - поверхностная плотность заряда на пластинах, E_1 и E_2 – напряженности поля в первом и втором слоях диэлектриков, ε_1 и ε_2 – диэлектрические проницаемости в первом втором диэлектрике.

Подставив уравнения (2), (3) и (4) в (1), после преобразования получим:

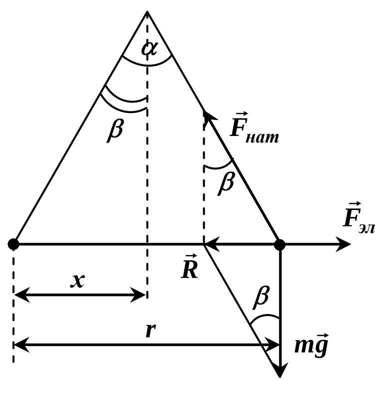
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1/\varepsilon_1 + d_2/\varepsilon_2} .$$

$$C = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 100 \cdot 10^{-4}}{\dfrac{2 \cdot 10^{-2}}{5} + \dfrac{1{,}5 \cdot 10^{-2}}{3}} = 9{,}83 \cdot 10^{-12} Ф = 9{,}83\, пФ .$$

Ответ: $C = 9{,}83\, пФ$.

Пример 6.7 Два шарика одинаковых радиуса и массы подвешены в вакууме на нитях так, что их поверхности соприкасаются. После сообщения шарикам заряда $q_1 = q_2 = q = 4 \cdot 10^{-9}\, Кл$, они оттолкнулись друг от друга и разошлись на угол $\alpha = 60^\circ$. Найти массу шариков, если расстояние от точки подвеса до центра шариков равно $l = 20\, см$.

Решение:



На первый шарик действуют следующие силы:

$m\vec{g}$ - сила тяжести;

$\vec{F}_{нат.}$ - сила натяжения нити;

$\vec{F}_{эл}$ - электрическая сила;

$\vec{R}$ - результирующая сила между $\vec{F}_{нат.}$ и $m\vec{g}$.

Вдоль оси x действуют две силы $R = F_{эл.}$. Подставляя вместо $F_{эл.}$ закон Кулона, а вместо $R = mg \cdot tg\beta$, где $\beta = 30^0$, получим $mg \cdot tg\beta = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}$, но из рисунка следует, что $r = 2x = 2l \sin\beta$, тогда $$mg \cdot tg\beta = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 4l^2 Sin^2\beta},$$ отсюда:

$$m = \frac{q_0^{\ 2}}{16\pi\varepsilon\varepsilon_0 g l^2 sin^2\beta \cdot tg\beta}; \quad \text{но} \quad q_0 = \frac{q}{2},$$

тогда

$$m = \frac{q^2}{64\varepsilon\varepsilon_0 g l^2 sin\beta \cdot tg\beta} .$$

Подставив значения, получим

$$m = \frac{\left(4 \cdot 10^{-9}\right)^2}{64 \cdot 1 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 9,81 \cdot \left(0,2\right)^2 sin60^\circ tg60^\circ} = 15,6 \cdot 10^{-3} кг .$$

Ответ: $m = 15,6 \cdot 10^{-3} кг$.

Пример 6.8 Медный шар плотностью $\rho_1 = 8,93 \frac{г}{см^3}$ и диаметром $d = 1\ см$ помещен в масло. Плотность масла $\rho_2 = 800 \frac{кг}{м^3}$. Чему равна величина положительно заряженного шара, если в однородном электрическом поле он оказался взвешенным в масле. Электрическое поле направлено вертикально вверх и его напряженность $E = 0,36 \frac{кВ}{см}$.

Решение:

На шар действуют три силы: сила электрического поля $\vec{F}_э$, направленная вверх, сила тяжести $\vec{F}_{тяж} = m\vec{g}$, направленная вниз и сила Архимеда $\vec{F}_A$, направленная вверх.

Так как шар по условию задачи покоится, то уравнение динамики для него будет иметь вид:

$$\vec{F}_{тяж} + \vec{F}_э + \vec{F}_A = 0 .$$

Проецируя это уравнение на вертикальную ось, получим:

$$F_э + F_A - F_{тяж} = 0, \qquad \text{причем:}$$

$$F_{тяж} = mg = \rho_1 V g = \rho_1 \frac{4}{3}\pi r^3 g = \rho_1 \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3 g = \frac{1}{6}\rho_1 \pi d^3 g,$$

где ρ_1 - плотность меди,

$$F_э = qE,$$

$$F_A = \rho_2 \frac{4}{3}\pi r^3 g = \frac{1}{6}\rho_2 \pi d^3 g, \quad \text{где } \rho_2 \text{ - плотность масла.}$$

Таким образом: $$F_A = \rho_2 \frac{4}{3}\pi r^3 g = \frac{1}{6} qE + \frac{1}{6}\rho_2 \pi d^3 g - \frac{1}{6}\rho_1 \pi d^3 g = 0$$

Решая это уравнение, получим: $$q = \frac{\pi d^3 g \left(\rho_1 - \rho_2\right)}{6E} .$$

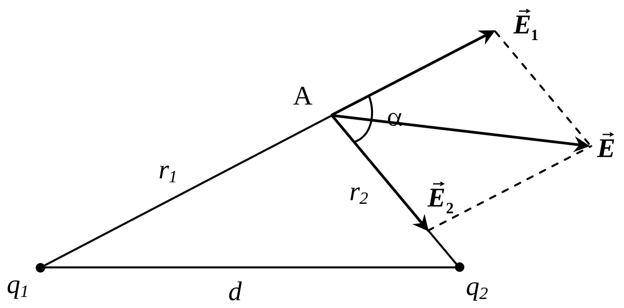
Окончательно:

$$q = \frac{3,14 \cdot \left(10^{-2}\right)^3 \cdot 9,81 \left(8930 - 800\right)}{6 \cdot 3,6} = 1,67 \cdot 10^{-4}\ Кл .$$

Ответ: $q = 1,67 \cdot 10^{-4}\ Кл$.

Пример 6.9 Электрическое поле создано двумя точечными зарядами $q_1 = 30нКл$ и $\boldsymbol{q_2 = 10нКл}$. Расстояние между зарядами равно $d = 0{,}2\ см$. Определить напряженность электрического поля в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 0{,}15\ см$ от первого и на расстоянии $r_2 = 0{,}1\ см$ от второго заряда.

Решение:



Согласно принципу суперпозиции электрических полей, каждый заряд создает поле независимо от присутствия в пространстве других зарядов, поэтому напряженность $\vec{E}$ электрического поля в искомой точке (А) может быть найдена, как векторная сумма напряженностей $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2.$$

Напряженность электрического поля, создаваемого в вакууме первым и вторым зарядами, соответственно равны:

$$E_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1^2}, \qquad E_2 = \frac{|q_2|}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_2^2}.$$

Вектор $\vec{E}_1$ направлен по силовой линии от заряда q_1, так как он положительный; вектор $\vec{E}_2$ направлен также по силовой линии, но к заряду q_2, так как он отрицательный.

Модуль вектора $\vec{E}$ найдем по теореме косинусов:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 cos\alpha},$$

где α может быть найден из треугольника со сторонами r_1, r_2 и d:

$$cos\alpha = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}.$$

Следовательно:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4} + 2\frac{q_1q_2}{r_1^2r_2^2}cos\alpha}.$$

Подставив числовые значения, получим: $E = 1.67 \cdot 10^4\ \frac{В}{м}$.

Ответ: $E = 1.67 \cdot 10^4\ \frac{В}{м}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 6.1 Даны два шарика массой m = 1 г каждый. Какой заряд нужно сообщить каждому шарику, чтобы сила взаимного отталкивания зарядов уравновесила силу взаимного притяжения шариков по закону тяготения Ньютона? Рассматривать шарики как материальные точки. ***Ответ:*** $q = 87 \cdot 10^{-15}\,Кл$.

Задача 6.2 Два шарика массой m = 0,1 г каждый подвешены в одной точке на нитях длиной L = 20 см каждая. Получив одинаковый заряд, шарики разошлись так, что нити образовали между собой угол α = 60°. Найти заряд каждого шарика. ***Ответ:*** $q = 50\,нКл$.

Задача 6.3 В элементарной теории атома водорода принимают, что электрон обращается вокруг ядра по круговой орбите. Определить скорость электрона, если радиус орбиты r = 53 пм, а также частоту n вращения электрона. ***Ответ:*** $\upsilon = 219\frac{км}{с}$; $n = 6.6 \cdot 10^{14}\,\frac{об}{с}$

Задача 6.4 Бесконечная плоскость несёт заряд, равномерно распределённый с поверхностной плотностью заряда 1 мкКл/м^2. На некотором расстоянии от плоскости параллельно ей расположен круг радиусом 10 см. Определите поток вектора напряжённости электростатического поля плоскости через этот круг. ***Ответ:*** $\Phi_E = 1.78\,кВ \cdot м$

Задача 6.5 Электрическое поле создано двумя точечными зарядами Q_1 = 10 нКл и Q_2 = –20 нКл, находящимися на расстоянии d = 20 см друг от друга. Определить напряженность E поля в точке, удаленной от первого заряда на r_1 = 30 см и от второго на r_2 = 50 см. ***Ответ:*** $E = 280\frac{В}{м}$.

Задача 6.6 Электрическое поле создано двумя бесконечными параллельными пластинами, несущими одинаковый равномерно распределенный по площади заряд (σ = 1 нКл/м^2). Определите напряженность электрического поля E между пластинами и вне пластин.

Ответ: $E_1 = 0\frac{В}{м}$; $E_2 = 113\frac{В}{м}$.

Задача 6.7 Электрон влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора со скоростью 10 Мм/с, направленной параллельно пластинам. На сколько приблизится электрон к положительно заряженной пластине за время движения внутри конденсатора (поле считать однородным), если расстояние между пластинами равно 16 мм, разность потенциалов 30 В и длина пластин равна 6 см? ***Ответ:*** $d = 5.9\,мм$

Задача 6.8 Вычислить потенциальную энергию системы двух точечных зарядов 100 нКл и 10 нКл, находящихся на расстоянии 10 см друг от друга. ***Ответ:*** $П = 90\,мкДж$.

Задача 6.9 Определить работу $A_{1,2}$ сил поля по перемещению заряда Q = 1 мкКл из точки 1 в точку 2 поля, созданного заряженным проводящим шаром (рис. 15.15). Потенциал φ шара равен 1 кВ. ***Ответ:*** $A = 250\,мкДж$

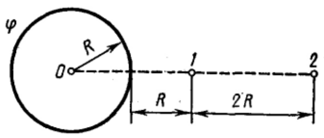


Рис. 15.15

Задача6.10 Определить напряжённость и потенциал электростатического поля точечного диполя в точках А и В (рис. 16.6), если его электрический момент равен 1 пКл·м, а расстояние от тосек А и В до центра диполя равно 10 см.

Ответ: $E_A = 9\frac{В}{м}$; $\varphi_A = 0В$; $E_B = 18\frac{В}{м}$; $\varphi_B = 0.9В$.

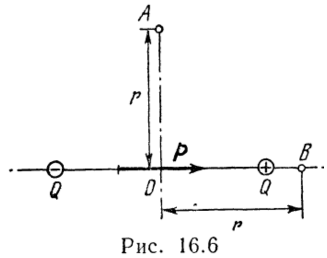


Рис. 16.6