А.Н. Огурцов

ФИЗИКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Часть 1

МЕХАНИКА

OUTLINE of PHYSICS for STUDENTS

https://sites.google.com/site/anogurtsov/lectures/phys/

2016

Введение

***Физика** – это наука, изучающая общие свойства движения вещества и поля.*
(А.И. Иоффе).

Физика – *наука о простейших формах движения материи и соответствующих им наиболее общих законах природы*. Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая, электрическая, магнитная и т. д.) являются составляющими более сложных форм движения материи (химических, биологических и др.), поэтому физика является основой для других естественных наук (астрономия, биология, химия, геология и др.).

Физика – это ***база*** для создания новых отраслей техники – *фундаментальная основа подготовки инженера*.

В своей основе *физика – экспериментальная наука:* её законы базируются на фактах, установленных опытным путём. В результате обобщения экспериментальных фактов устанавливаются ***физические законы*** – устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, *существующие в природе*, устанавливающие связь между физическими величинами.

Для установления количественных соотношений между физическими величинами их необходимо ***измерять***, т. е. *сравнивать их с соответствующими эталонами*. Для этого вводится ***система единиц***, которая постулирует ***основные единицы*** физических величин и на их базе определяет единицы остальных физических величин, которые называются ***производными единицами***.

Международная Система единиц (СИ) (Le Système International – ***SI***).

Основные единицы:

Метр (м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за $\dfrac{1}{299\,792\,458}$ с.

Килограмм (кг) – масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

Секунда (с) – время, равное 9 192 631 770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133.

Ампер (А) – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого, создаёт между этими проводниками на каждый метр длины силу, равную $2\cdot10^{-7}$ Ньютона.

Кельвин (К) – $\dfrac{1}{273{,}16}$ часть термодинамической температуры тройной точки воды.

Моль (моль) – количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода ^{12}C.

Кандела (кд) – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой $540\cdot10^{12}$ герц, энергетическая сила света которого в этом направлении составляет $\dfrac{1}{683}\,\dfrac{\text{Вт}}{\text{ср}}$.

Дополнительные единицы системы СИ:

Радиан (рад) – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

Стерадиан (ср) – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающий на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной равной радиусу сферы.

Производные единицы *устанавливаются на основе физических законов, связывающих их с основными единицами*. ***Например***, производная единица скорости (1 м/с) получается из формулы равномерного прямолинейного движения $\upsilon = \dfrac{s}{t}$.

Кинематика

1. Механика и её структура. Модели в механике

Механика – это часть физики, которая изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение взаимного расположения тел или их частей в пространстве с течением времени.

Обычно под механикой понимают ***классическую механику***, в которой рассматриваются движения макроскопических тел, совершающиеся со скоростями, во много раз меньшими скорости света в вакууме.

Законы движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света в вакууме, изучаются ***релятивистской механикой*.**

Квантовая механика изучает законы движения атомов и элементарных частиц.

РАЗДЕЛЫ МЕХАНИКИ:

Кинематика – изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

Динамика – изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика – изучает законы равновесия системы тел.

Механика для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач использует разные *упрощённые* ***физические модели*:**

- ***Материальная точка*** – тело, форма и размеры которого несущественны в условиях данной задачи.
- ***Абсолютно твёрдое тело*** – тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь, и расстояние между любыми двумя точками этого тела остаётся постоянным.
- ***Абсолютно упругое тело*** – тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения внешнего силового воздействия такое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.
- ***Абсолютно неупругое тело*** – тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

Любое движение твёрдого тела можно представить как ***комбинацию*** *поступательного* и *вращательного* движений.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, жёстко связанная с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению.

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения***.

2. Система отсчёта. Траектория, длина пути, вектор перемещения

Движение тел происходит в пространстве и во времени. Поэтому для описания движения материальной точки надо знать, в каких местах пространства эта точка находилась, и в какие моменты времени она проходила то или иное положение.

Тело отсчёта – произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение остальных тел.

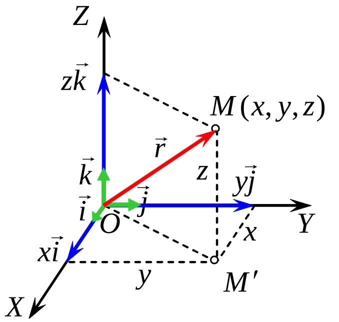
Система отсчёта – совокупность системы координат и часов, связанных с телом отсчёта.

Наиболее употребительная система координат – ***декартовая*** – ортонормированный базис которой образован тремя единичными по модулю и взаимно ортогональными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, проведёнными из начала координат.

Положение произвольной точки M характеризуется ***радиусом-вектором*** $\vec{r}$, соединяющим начало координат O с точкой M:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \qquad |\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Движение материальной точки полностью определено, если декартовы координаты материальной точки заданы в зависимости от времени t (от лат. $tempus$):



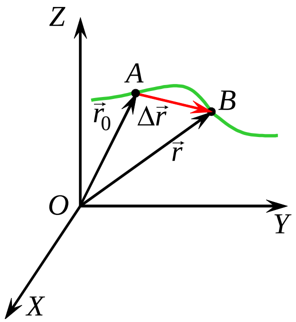
$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Эти уравнения называются ***кинематическими уравнениями движения точки***. Они эквивалентны одному векторному уравнению движения точки:

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

Линия, описываемая движущейся материальной точкой (или телом) относительно выбранной системы отсчёта называется ***траекторией***. Уравнение траектории можно получить, исключив параметр t из кинематических уравнений.

В зависимости от формы траектории движение может быть ***прямолинейным*** или ***криволинейным.***



Длиной пути точки называется сумма длин всех участков траектории, пройдённых этой точкой за рассматриваемый промежуток времени $\Delta s = \Delta s(t)$. Длина пути – ***скалярная*** функция времени.

Вектор перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – вектор, проведённый из начального положения движущейся точки в положение её в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \Delta x \cdot \vec{i} + \Delta y \cdot \vec{j} + \Delta z \cdot \vec{k}.$$

В пределе $\Delta t \to 0$ длина пути по хорде Δs и длина хорды $\Delta r = |\Delta\vec{r}|$ будут все меньше отличаться:

$$\mathrm{d}s = |\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}r.$$

3. Скорость

Скорость – это *векторная* величина, которая определяет как быстроту движения, так и его направление в данный момент времени.

Вектором средней скорости $\vec{\upsilon}$ (от лат. $velocitas$) за интервал времени Δt называется отношение приращения $\Delta\vec{r}$ радиуса-вектора точки к промежутку времени Δt.

$$\langle\vec{\upsilon}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Направление вектора средней скорости совпадает с направлением $\Delta\vec{r}$.

Единица скорости – м/с.

Мгновенная скорость – векторная величина, равная первой производной по времени от радиуса-вектора $\vec{r}$ рассматриваемой точки:

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{r}}.$$

Вектор мгновенной скорости направлен по *касательной* к траектории в сторону движения. Модуль мгновенной скорости (*скалярная* величина) равен первой производной пути по времени:

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}. \qquad \text{(Отсюда: } \mathrm{d}s = \upsilon\,\mathrm{d}t\text{.)}$$

При неравномерном движении модуль мгновенной скорости с течением времени изменяется. Поэтому можно ввести *скалярную* величину $\langle\upsilon\rangle$ – ***среднюю скорость неравномерного движения*** (другое название – *средняя путевая скорость*).

$$\langle\upsilon\rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Длина пути s, пройдённого точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, задаётся следующим интегралом:

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \upsilon(t)\,\mathrm{d}t$$

При ***прямолинейном движении*** точки направление вектора скорости сохраняется неизменным.

Движение точки называется ***равномерным***, если модуль её скорости не изменяется с течением времени $(\upsilon = \mathrm{const})$, для него:

$$s = \upsilon \cdot \Delta t.$$

Если модуль скорости увеличивается с течением времени, то движение называется ***ускоренным***, если же он убывает с течением времени, то движение называется ***замедленным***.

4. Ускорение

Ускорение $\vec{a}$ (от лат. $acceleratio$) – это векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости по модулю и направлению.

Среднее ускорение в интервале времени Δt – векторная величина, равная отношению изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к интервалу времени Δt.

$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}$$

Мгновенное ускорение материальной точки – векторная величина, равная первой производной по времени скорости рассматриваемой точки (второй производной по времени от радиуса-вектора этой же точки):

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\upsilon}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}.$$

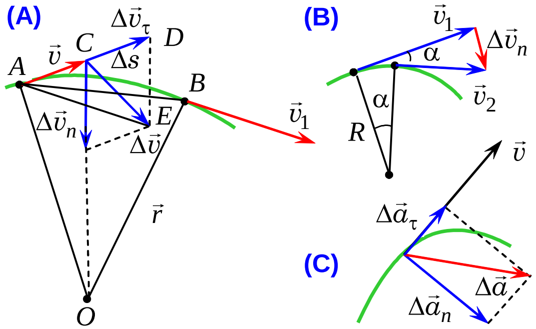
Единица ускорения – м/с^2.

В общем случае плоского криволинейного движения вектор ускорения удобно представить в виде *суммы двух проекций:* $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$.

Тангенциальное ускорение $\vec{a}_\tau$ характеризует быстроту изменения скорости по модулю (рис. (A)), его величина:

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.$$

Нормальное (центростремительное) ускорение $\vec{a}_n$ направлено по нормали к траектории к центру её кривизны O и характеризует *быстроту изменения направления* вектора скорости точки. Величина нормального ускорения a_n связана со скоростью v движения по кругу и величиной радиуса R (рис. (B)). Пусть $|v_1| = |v_2| = v$. Тогда для $\alpha \to 0$ $\Delta v_n = v \sin\alpha \approx v \cdot \alpha$, $\Delta s = v \cdot \Delta t \approx R \cdot \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx (v \cdot \Delta t)/R$, отсюда:



$$\Delta v_n \approx \frac{v^2}{R}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{R} \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{\mathrm{d}v_n}{\mathrm{d}t} = \frac{v^2}{R}.$$

Величина ***полного*** *ускорения* (рис. (C)): $\qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$.

Виды движения:

1) $\vec{a}_\tau = 0, \quad \vec{a}_n = 0$ – ***прямолинейное равномерное*** движение: $\vec{a} = 0$;

2) $\vec{a}_\tau = a = \text{const}, \quad \vec{a}_n = 0$ – ***прямолинейное равнопеременное* (*равноускоренное*)** движение. Если $t_0 = 0$, то:

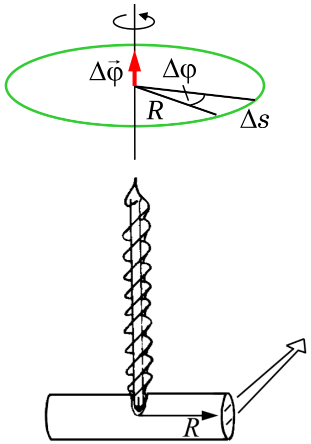
$$a_\tau = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{v - v_0}{t}; \qquad v = v_0 + a \cdot t; \qquad s = \int_0^t (v_0 + at)\,\mathrm{d}t = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

3) $a_\tau = 0, \quad a_n = \text{const} = \dfrac{v^2}{R}$ – ***равномерное движение по окружности***;

4) $\vec{a}_\tau \neq 0, \vec{a}_n \neq 0$ – ***криволинейное равнопеременное движение.***

5. Кинематика вращательного движения

При описании вращательного движения удобно пользоваться ***полярными координатами*** R и φ, где R – ***радиус*** – расстояние от полюса (центра вращения) до материальной точки, а φ – полярный ***угол*** (угол поворота).



Элементарные повороты (обозначаются $\Delta\vec{\varphi}$ или $\mathrm{d}\vec{\varphi}$) можно рассматривать как ***псевдовекторы***.

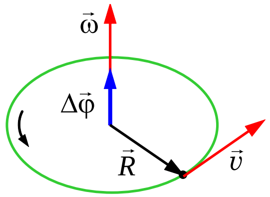
Угловое перемещение $\mathrm{d}\vec{\varphi}$ – векторная величина, модуль которой равен углу поворота, а направление совпадает с направлением поступательного движения ***правого винта***.

Угловая скорость: $\vec{\omega} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\varphi}}$. ***Угловое ускорение***: $\vec{\beta} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{\omega}} = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{\varphi}}$.

Вектор $\vec{\omega}$ ***направлен*** вдоль оси вращения, так же как и вектор $\mathrm{d}\vec{\varphi}$, т.е. по правилу правого винта. Вектор $\vec{\beta}$ направлен вдоль оси вращения в сторону вектора приращения угловой скорости (при *ускоренном* вращении вектор $\vec{\beta}$ сонаправлен вектору $\vec{\omega}$, при *замедленном* – противонаправлен ему).

Единицы угловой скорости и углового ускорения – рад/с и рад/с^2.

Линейная скорость точки связана с угловой скоростью и радиусом траектории соотношением: $\quad v = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{R \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = R \cdot \lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \omega R$.



В векторном виде формулу для линейной скорости можно написать как ***векторное произведение***:

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{R}].$$

По определению векторного произведения (см. стр.1-29) его модуль равен $|\vec{v}| = \omega R \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{R}$, а направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от $\vec{\omega}$ к $\vec{R}$.

При равномерном вращении: $\qquad \omega = \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \text{const}$, следовательно: $\qquad \varphi = \omega \cdot t$.

Равномерное вращение можно характеризовать ***периодом вращения*** T – временем, за которое точка совершает один полный оборот: $2\pi = \omega \cdot T$.

Частота вращения – число полных оборотов, совершаемых телом при равномерном его движении по окружности, в единицу времени.

***Единица частоты вращения* – герц (Гц).**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi \cdot n$$

При равноускоренном вращательном движении: $\quad \beta = \text{const}$,

$$\omega = \omega_0 + \beta \cdot t; \qquad \varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\beta \cdot t^2}{2}; \qquad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R;$$

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(\omega R)}{\mathrm{d}t} = R\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = R\beta; \quad s = \int_{t_1}^{t_2} v\,\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \omega R\,\mathrm{d}t = R\int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = R\varphi.$$

$$s = R\varphi$$

$$v = R\omega$$

$$a_\tau = R\beta$$

$$a_n = R\omega^2$$

Динамика материальной точки

6. Первый закон Ньютона

Материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока воздействие со стороны других тел не заставит её изменить это состояние.

Стремление тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения *называется* ***инертностью***. Поэтому первый закон Ньютона называют также ***законом инерции***. Первый закон Ньютона *постулирует* существование ***инерциальных систем отсчёта* –** таких, относительно которых, материальная точка, не подверженная воздействию других тел, движется равномерно и прямолинейно.

Чтобы описывать *воздействия*, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводят понятие ***силы***. Для описания *инерционных* свойств тел вводится понятие ***массы***.

7. Сила

Сила – векторная величина, являющаяся *мерой механического действия* на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет форму и размеры.

Механическое взаимодействие может осуществляться как *между непосредственно* контактирующими телами (например, при ударе, трении, давлении друг на друга и т. п.), так и *между удалёнными телами*.

Особая форма материи, связывающая частицы вещества в единые системы и передающая с конечной скоростью действие одних частиц на другие, называется ***физическим полем*** или просто ***полем***.

Взаимодействие между удалёнными телами осуществляется посредством связанных с ними гравитационных и электромагнитных полей.

Пользуясь понятием силы, в механике обычно говорят о движении и деформации рассматриваемого тела *под действием приложенных к нему сил*. При этом, конечно, ***каждой силе*** всегда *соответствует какое-то определённое тело или поле, действующее с этой силой*.

Сила $\vec{F}$ полностью задана, если указаны её *модуль* F, *направление* в пространстве и *точка приложения*.

Прямая, вдоль которой направлена сила, называется ***линией действия силы. Центральными*** называются силы, которые всюду направлены вдоль прямых, проходящих через одну и ту же неподвижную точку – *центр сил*, и зависят только от расстояния до центра сил.

Поле, действующее на материальную точку с силой $\vec{F}$, называется ***стационарным полем***, если оно не изменяется с течением времени.

Одновременное действие на материальную точку нескольких сил эквивалентно действию одной силы, называемой ***равнодействующей***, или ***результирующей***, силой и *равной их геометрической сумме*.

***Единица силы* – ньютон (Н):** 1 Н – сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2 в направлении действия силы.

8. Механические системы

Механической системой называется совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое.

Тела, не входящие в состав исследуемой механической системы, называются ***внешними телами***. Силы, действующие на систему со стороны внешних тел, называются ***внешними силами***.

Внутренними силами называются силы взаимодействия между частями рассматриваемой системы.

Механическая система называется ***замкнутой***, или ***изолированной***, ***системой***, если она не взаимодействует с внешними телами (на неё не действуют внешние силы).

Тело называется ***свободным***, если на его положение и движение в пространстве не наложено никаких ограничений, и – ***несвободным*** – если на его возможные положения и движения наложены те или иные ограничения,

называемые в механике ***связями***. Несвободное тело можно рассматривать как свободное, заменив действие на него тел, осуществляющих связи, соответствующими силами. Эти силы называются ***реакциями связей***, а все остальные силы, действующие на тело, – ***активными силами***.

9. Масса

Масса – физическая величина, одна из основных характеристик материи, определяющая её *инерционные* и *гравитационные* свойства.

Единица массы – килограмм (кг).

Плотностью тела ρ в данной его точке M называется отношение массы $\mathrm{d}m$ малого элемента тела, включающего точку M, к величине $\mathrm{d}V$ объёма этого элемента.

$$\rho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V}$$

10. Импульс

Векторная величина $\vec{p}$, равная произведению массы m материальной точки на её скорость $\vec{v}$, и имеющая направление скорости, называется ***импульсом***, или ***количеством движения***, этой материальной точки.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

11. Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона – основной закон динамики поступательного движения – отвечает на вопрос, как изменяется механическое движение материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

Ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела):

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \text{или} \quad \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec{p}}.$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

***Более общая формулировка второго закона Ньютона*:** скорость изменения импульса материальной точки равна действующей на неё силе.

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Векторная величина $\vec{F}\,\mathrm{d}t$ называется ***элементарным импульсом силы*** $\vec{F}$ за ***малое*** время $\mathrm{d}t$ её действия. Импульс силы за промежуток времени t_1 определяется интегралом $\int_0^{t_1}\vec{F}\,\mathrm{d}t$. Согласно второму закону Ньютона **изменение импульса материальной точки** равно **импульсу действующей на неё силы:**

$$\mathrm{d}\vec{p} = \vec{F}\,\mathrm{d}t \quad \text{и} \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\,\mathrm{d}t.$$

Основной закон динамики материальной точки выражает принцип причинности в классической механике – ***однозначная связь*** *между изменением с течением времени состояния движения и положения в пространстве материальной точки и действующими на неё силами, что позволяет, знав* начальное *состояние материальной точки,* вычислить её состояние *в любой последующий момент времени.*

12. Принцип независимости действия сил

В механике большое значение имеет принцип независимости действия сил: если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было. Согласно этому принципу силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

Например, *нормальное и тангенциальное ускорения* материальной точки определяются соответствующими составляющими силы:

$$\vec{a}_\tau = \frac{\vec{F}_\tau}{m}; \qquad a_\tau = \frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t} = \frac{F_\tau}{m}; \qquad F_\tau = m\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}t};$$

$$\vec{a}_n = \frac{\vec{F}_n}{m}; \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \omega^2 R = \frac{F_n}{m}; \qquad F_n = \frac{m\upsilon^2}{R} = m\omega^2 R.$$

Сила $\vec{F}_n$, сообщающая материальной точке *нормальное* ускорение, направлена к центру кривизны траектории и потому называется ***центростремительной силой.***

13. Третий закон Ньютона

Всякое действие материальных точек (тел) друг на друга имеет характер взаимодействия; силы с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки.

Эти силы *приложены к разным материальным точкам (телам), всегда действуют парами и являются силами одной природы*.

Третий закон Ньютона позволяет перейти от динамики отдельной материальной точки к динамике произвольной системы материальных точек, поскольку позволяет свести любое взаимодействие к силам парного взаимодействия между материальными точками.

14. Закон сохранения импульса

Импульс замкнутой системы не изменяется с течением времени (сохраняется):

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\upsilon}_i = \mathrm{const}.$$

Закон сохранения импульса является следствием однородности пространства: при параллельном переносе в пространстве замкнутой системы тел как целого её физические свойства не изменяются (не зависят от выбора положения начала координат инерциальной системы отсчёта).

15. Закон движения центра масс

В механике Ньютона из-за независимости массы от скорости *импульс системы может быть выражен через скорость её центра масс.* ***Центром масс*** (или ***центром инерции***) системы материальных точек называется воображаемая точка C, положение которой характеризует распределение массы этой системы. Её радиус-вектор равен:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{m}$$

где m_i и $\vec{r}_i$ – соответственно масса и радиус-вектор i-й материальной точки; n – число материальных точек в системе; $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$ – масса системы.

В этом случае импульс системы: $\vec{p} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = m\vec{\upsilon}_C$.

Закон движения центра масс: центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, действующих на систему.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}_C}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Из закона сохранения импульса следует, что ***центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остаётся неподвижным.***

16. Силы в механике

1) Силы тяготения (гравитационные силы).

В системе отсчёта, связанной с Землёй, на всякое тело массой m действует сила:

$$\vec{P} = m\vec{g},$$

называемая ***силой тяжести –*** сила, с которой тело притягивается Землёй. Под действием силы притяжения к Земле все тела падают с одинаковым ускорением $g = 9{,}81\ \text{м/с}^2$, называемым ***ускорением свободного падения***.

Весом тела – называется сила, с которой тело вследствие тяготения к Земле действует на опору или натягивает нить подвеса.

Сила тяжести действует всегда, а вес проявляется лишь тогда, когда на тело кроме силы тяжести действуют другие силы. Сила тяжести равна весу тела только в том случае, когда ускорение тела относительно земли равно нулю. В противном случае $\vec{P} = m(\vec{g} - \vec{a})$, где $\vec{a}$ – ускорение тела с опорой относительно Земли. Если тело *свободно* движется в поле силы тяготения, то $\vec{a} = \vec{g}$, и вес равен нулю, т.е. тело будет невесомым.

Невесомость – это состояние тела, при котором оно движется только под действием силы тяжести.

2) Силы упругости возникают в результате взаимодействия тел, сопровождающегося их деформацией.

Упругая сила пропорциональна смещению частицы из положения равновесия и направлена к положению равновесия:

$$\vec{F} = -k\vec{r},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор, характеризующий смещение частицы из положения равновесия, k – упругость. Примером такой силы является *сила упругости деформации пружины* при растяжении или сжатии:

$$F = -kx,$$

где k – жёсткость пружины, x – упругая деформация.

3) Сила трения скольжения возникает при скольжении данного тела по поверхности другого:

$$F_{\text{тр}} = kN,$$

где k – *коэффициент трения скольжения*, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей; N – *сила нормального давления*, прижимающая трущиеся поверхности друг к другу. *Сила трения направлена по касательной к трущимся поверхностям в сторону, противоположную движению данного тела относительно другого.*

Работа и энергия

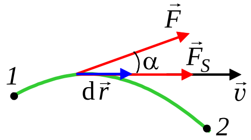
17. Работа, энергия, мощность

***Энергия** – это универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.* С различными формами движения материи связывают различные формы энергии: механическую, тепловую, электромагнитную, ядерную… Изменение механического движения тела вызывается силами, действующими на него со стороны других тел.

Работа силы – это количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

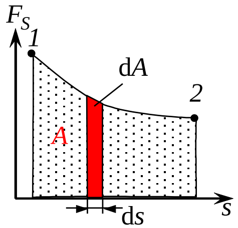
При *прямолинейном движении* тела под действием *постоянной* силы $\vec{F}$, которая составляет некоторый угол α с направлением перемещения, работа этой силы равна: $A = F_s s = Fs\cos\alpha$.

В общем случае сила может изменяться как по модулю, так и по направлению, поэтому этой формулой пользоваться нельзя. Однако на элементарном (бесконечно малом) перемещении $\mathrm{d}\vec{r}$ можно ввести *скалярную* величину – ***элементарную работу*** $\mathrm{d}A$ ***силы*** $\vec{F}$:



$$\mathrm{d}A = \left(\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\right) = F\cos\alpha\cdot\mathrm{d}s = F_s\,\mathrm{d}s.$$

Тогда ***работа силы на участке траектории*** от точки 1 до точки 2 равна алгебраической сумме элементарных работ на отдельных бесконечно малых участках пути:



$$A = \int_1^2 F\,\mathrm{d}s\cos\alpha = \int_1^2 F_s\,\mathrm{d}s.$$

Если зависимость F_s от s представлена графически, то работа A определяется площадью заштрихованной фигуры (см. рисунок).

Консервативной (потенциальной)** называют силу, работа которой определяется только начальным и конечным положениями тела и не зависит от формы пути.* Консервативными силами являются силы тяготения, упругости. Все центральные силы консервативны. Примером ***неконсервативных сил являются силы трения.

Чтобы охарактеризовать *скорость совершения работы*, вводят понятие ***мощности.*** Мощность N равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы.

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{F},\vec{v}\right)$$

Единица работы – джоуль (Дж) – работа совершаемая силой 1 Н на пути 1 м: 1 Дж = 1 Н·м.

Единица мощности – ватт (Вт): 1 Вт – мощность, при которой за время 1 с совершается работа 1 Дж: 1 Вт = 1 Дж/с.

18. Кинетическая и потенциальная энергия механической системы

Кинетическая энергия механической системы (K) – это энергия механического движения этой системы.

Сила, действуя на покоящееся тело и вызывая его движение, совершает работу, а энергия движущегося тела возрастает на величину затраченной

работы. Таким образом, *приращение кинетической* энергии частицы на элементарном перемещении равно *элементарной работе* на том же перемещении:

$$\mathrm{d}K = \mathrm{d}A.$$

Тело массой m, движущееся со скоростью v, обладает кинетической энергией:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{r} = m\vec{v}\,\mathrm{d}\vec{v} = mv\,\mathrm{d}v = \mathrm{d}K \quad\Rightarrow\quad K = \int_0^v mv\,\mathrm{d}v = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия зависит *только от массы и скорости* тела. Поэтому кинетическая энергия: (1) является *функцией состояния* системы; (2) всегда *положительна*; (3) *неодинакова* в разных инерциальных системах отсчёта.

Потенциальная энергия (W) – это механическая энергия системы тел, определяемая их взаимным расположением и характером сил взаимодействия между ними.

Потенциальная энергия системы, подобно кинетической энергии, является функцией состояния системы. Она зависит *только от конфигурации системы* и её положения по отношению к внешним телам.

Примеры потенциальной энергии:

1) Потенциальная энергия тела массой m на высоте h: $W = mgh$.

2) Потенциальная энергия пружины, растянутой на длину x: $W = \dfrac{kx^2}{2}$.

Единица кинетической и потенциальной ***энергии*** – Джоуль (Дж).

19. Закон сохранения энергии

Полная механическая энергия системы – энергия механического движения и взаимодействия $E = K + W$ – равна сумме кинетической и потенциальной энергий.

Закон сохранения энергии: в системе тел, между которыми действуют только *консервативные силы*, полная механическая энергия сохраняется, т.е. не изменяется со временем:

$$K + W = E = \mathrm{const}.$$

Это – **фундаментальный** закон природы. Он является следствием *однородности времени* – инвариантности физических законов относительно выбора начала отсчёта времени.

Механические системы, на тела которых действуют только консервативные силы (внутренние и внешние), называются ***консервативными системами***. *В консервативных системах полная механическая энергия остаётся постоянной*. Могут лишь происходить превращения кинетической энергии в потенциальную и обратно в эквивалентных количествах, так что полная энергия остаётся неизменной.

Диссипативные системы – системы, в которых механическая энергия постепенно уменьшается за счёт преобразования в другие (немеханические) формы энергии. В системе, в которой действуют также неконсервативные силы, например, силы трения, *полная механическая энергия системы не сохраняется*. Однако при "исчезновении" механической энергии всегда возникает эквивалентное количество энергии другого вида. Таким образом, ***энергия никогда на исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой***. В этом заключается *физическая сущность* закона сохранения и превращения энергии – сущность неуничтожимости материи и её движения.

20. Соударения

Удар (соударение) – это столкновение двух или более тел, при котором взаимодействие длится очень короткое время.

Центральный удар – это удар, при котором тела до удара движутся по прямой, проходящей через их центры масс.

Абсолютно упругий удар – столкновение двух тел, в результате которого в обоих взаимодействующих телах не остаётся никаких деформаций, и вся кинетическая энергия, которой обладали тела до удара, после удара снова превращается в кинетическую энергию. **Выполняются** *законы сохранения* импульса и сохранения механической энергии.

Обозначим скорости шаров с массами m_1 и m_2 до удара через $\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{\upsilon}_2$, после удара – через $\vec{\upsilon}_1'$ и $\vec{\upsilon}_2'$. Рассмотрим прямой центральный удар. Законы сохранения: $m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1'\upsilon_1' + m_2\upsilon_2'$, $\quad \frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1\upsilon_1'^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2'^2}{2}$.

Отсюда: $\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\upsilon_1 + 2m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}$, $\quad \upsilon_2' = \frac{(m_2 - m_1)\upsilon_2 + 2m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}$.

Абсолютно неупругий удар – это столкновение двух тел, в результате которого тела объединяются, двигаясь дальше как единое тело.

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}, \qquad \vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}. \qquad \textit{При } m_1 = m_2 \quad \vec{\upsilon} = \frac{\vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2}{2}.$$

Не выполняется закон сохранения механической энергии: вследствие деформации часть кинетической энергии переходит во внутреннюю энергию тел (разогрев). Это уменьшение равно:

$$\Delta K = \left(\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2}\right) - \frac{(m_1 + m_2)\upsilon^2}{2} = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\upsilon_1 - \upsilon_2)^2.$$

Если ударяемое тело было первоначально неподвижно $(\upsilon_2 = 0)$, то:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1}{m_1 + m_2}, \qquad \Delta K = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\frac{m_1\upsilon_1^2}{2}.$$

Если $m_2 \gg m_1$, то $\upsilon \ll \upsilon_1$ и $\Delta K \approx K_1$.

Механика твёрдого тела

21. Момент инерции

Моментом инерции материальной точки относительно оси вращения называется произведение массы этой точки на квадрат расстояния от оси.

Моментом инерции системы (тела) *относительно оси вращения* называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояний до рассматриваемой оси.

$$J_i = m_i r_i^2. \qquad J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

В случае непрерывного распределения масс эта сумма сводится к интегралу $J = \int_0^m r^2\,\mathrm{d}m$, где интегрирование производится по объёму тела.

Главный момент инерции – момент инерции относительно главной оси вращения *проходящей через центр масс*.

Момент инерции тела зависит от того, относительно какой оси оно вращается и как распределена масса тела по объёму.

Моменты инерции однородных тел массой m, имеющих правильную геометрическую форму и равномерное распределение массы по объёму.

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиуса R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиуса R	Ось симметрии	$\frac{1}{2}mR^2$
Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера:**

момент инерции тела J относительно произвольной оси z равен сумме момента его инерции J_C относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, и произведения массы m тела на квадрат расстояния a между осями.

$$J_z = J_C + ma^2$$

Например, момент инерции прямого тонкого стержня длиной l относительно оси, которая перпендикулярна стержню и проходит через его конец (эта ось отстоит на $l/2$ от оси, проходящей через центр стержня):

$$J_z = J_C + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2 + \frac{1}{4}ml^2 = \frac{1}{3}ml^2.$$

Таким образом, величина момента инерции зависит от выбора оси вращения.

22. Кинетическая энергия вращения

Абсолютно твёрдое тело вращается около неподвижной оси z, проходящей через него. Все точки тела движутся с одинаковой угловой скоростью $\omega = \mathrm{const}$. Кинетическая энергия тела:

$$K_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\upsilon_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{m_i(\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2 = \frac{J_z\omega^2}{2},$$

где J_z – момент инерции тела относительно оси z.

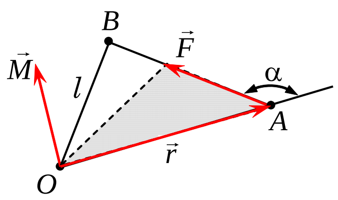
Если тело совершает поступательное и вращательное движения одновременно, то его полная кинетическая энергия равна сумме кинетических энергий.

$$K = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{J_z\omega^2}{2}.$$

Из сопоставления формул кинетической энергии для поступательного и вращательного движений видно, что ***мерой инертности при вращательном движении служит момент инерции тела.***

23. Момент силы

Моментом силы $\vec{F}$ **относительно неподвижной точки** O называется физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-



вектора $\vec r$, проведённого из точки O в точку A приложения силы, на силу $\vec F$:

$$\vec M = [\vec r, \vec F].$$

Модуль момента силы: $M = Fr\sin\alpha = Fl$, где $l = r\sin\alpha$ – ***плечо силы*** – кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой O; α – угол между $\vec r$ и $\vec F$.

Моментом силы относительно неподвижной оси z – называется *скалярная* величина M_z, равная проекции на эту ось вектора $\vec M$ момента силы, определённого относительно произвольной точки O данной оси z. Значение момента не зависит от выбора положения точки O на оси z.

24. Основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела

При повороте тела под действием силы $\vec F$ на бесконечно малый угол $\mathrm{d}\varphi$ точка приложения силы A проходит путь $\mathrm{d}s = r\,\mathrm{d}\varphi$, и работа равна:

$$\mathrm{d}A = F\sin\alpha\, r\,\mathrm{d}\varphi = M_z\,\mathrm{d}\varphi.$$

Работа вращения тела идёт на увеличение его кинетической энергии:

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}K = \mathrm{d}\left((J_z\omega^2)/2\right) = J_z\omega\,\mathrm{d}\omega.$$

Тогда $M_z\,\mathrm{d}\varphi = J_z\omega\,\mathrm{d}\omega$, или $M_z\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = J_z\omega\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$, откуда следует ***уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела***: $M_z = J_z\cdot\beta$.

Если ось вращения совпадает с главной осью инерции, проходящей через центр масс, то имеет место векторное равенство $\vec M = J\cdot\vec\beta$, где J – ***главный момент инерции тела*** (момент инерции относительно главной оси).

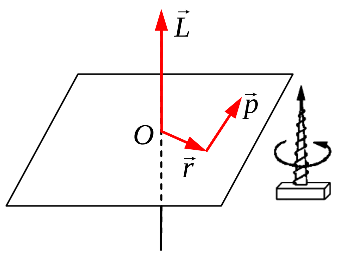
$$M_z = J_z\cdot\beta.$$

$$\vec M = J\cdot\vec\beta.$$

25. Момент импульса и закон его сохранения

Моментом импульса (количества движения) ***материальной точки*** A ***относительно неподвижной точки*** O называется физическая величина, определяемая векторным произведением:

$$\vec L = [\vec r, \vec p] = [\vec r, m\vec\upsilon].$$



Моментом импульса относительно неподвижной оси z называется скалярная величина L_z, равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки O данной оси. Значение момента импульса L_z не зависит от положения точки O на оси z.

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси каждая точка тела движется *по окружности* постоянного радиуса r_i со скоростью υ_i *перпендикулярной* радиусу. Момент импульса отдельной частицы равен $L_{iz} = m_i\upsilon_i r_i$ и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта (совпадает с направлением вектора угловой скорости $\vec\omega$).

Момент импульса твёрдого тела относительно оси есть *сумма моментов* импульса отдельных частиц:

$$L_z = \sum_{i=1}^{n} m_i\upsilon_i r_i = \sum_{i=1}^{n} m_i\omega r_i^2 = J_z\omega$$

Продифференцируем по времени:

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J_z\beta = M_z.$$

В векторной форме: $\vec M = \dfrac{\mathrm{d}\vec L}{\mathrm{d}t} = \dot{\vec L}$ – **ещё одна форма *уравнения динамики вращательного движения* твёрдого тела**.

В замкнутой системе момент внешних сил $\vec M = 0$, следовательно, и $\dot{\vec L} = 0$.

Закон сохранения момента импульса: *момент импульса замкнутой системы сохраняется, т. е. не изменяется с течением времени:*

$$\vec L = \mathrm{const}$$

Это – фундаментальный закон природы. Он является следствием *изотропности пространства*: инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчёта.

При равномерном вращении твёрдого тела относительно некоторой оси z закон сохранения момента импульса $\vec L = \mathrm{const}$ равносилен: $J_z\omega = \mathrm{const}$.

26. Сравнительная таблица основных величин и соотношений для поступательного движения тела и для его вращения вокруг неподвижной оси

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Перемещение	$\mathrm{d}\vec r$	Угловое перемещение	$\mathrm{d}\vec\varphi$
Скорость	$\vec\upsilon = \dot{\vec r}$	Угловая скорость	$\vec\omega = \dot{\vec\varphi}$
Ускорение	$\vec a = \dot{\vec\upsilon}$	Угловое ускорение	$\vec\beta = \dot{\vec\omega}$
Сила	$\vec F$	Момент силы	$\vec M$
Импульс	$\vec p$	Момент импульса	$\vec L$
Работа	$\mathrm{d}A = F_s\,\mathrm{d}s$	Работа	$\mathrm{d}A = M_z\,\mathrm{d}\varphi$
Кинетическая энергия	$m\upsilon^2/2$	Кинетическая энергия	$J_z\omega^2/2$
Основное уравнение динамики	$\vec F = m\vec a$	Основное уравнение динамики	$\vec M = J\cdot\vec\beta$
	$\vec F = \dfrac{\mathrm{d}\vec p}{\mathrm{d}t}$		$\vec M = \dfrac{\mathrm{d}\vec L}{\mathrm{d}t}$

Деформации твёрдого тела

27. Деформации твёрдого тела

Реальные тела не являются абсолютно упругими.

Деформация – это изменение формы и размеров твёрдых тел под действием внешних сил.

Пластическая деформация – это деформация, которая сохраняется в теле после прекращения действия внешних сил.

*Деформация называется **упругой**,* если после прекращения действия внешних сил тело принимает первоначальные размеры и форму.

Все виды деформаций (растяжение, сжатие, изгиб, кручение, сдвиг) могут быть сведены к одновременно происходящим деформациям растяжения (или сжатия) и сдвига.

Напряжение σ – это физическая величина, численно равная упругой силе $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{elastic}}$, приходящейся на единицу площади $\mathrm{d}S$ сечения тела:

$$\vec{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{el}}}{\mathrm{d}S}$$

Если сила направлена по нормали к поверхности, *то напряжение* ***нормальное***, если – по касательной, то *напряжение* ***тангенциальное***.

Относительная деформация – количественная мера, характеризующая степень деформации и определяемая отношением абсолютной деформации Δx к первоначальному значению величины x, характеризующей форму или размеры тела: ⟹

$$\frac{\Delta x}{x}$$

Так,

– ***относительное изменение длины*** l ***стержня*** (продольная деформация) ε: ⟹

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

– ***относительное поперечное растяжение (сжатие)*** ε', где d – диаметр стержня.

$$\varepsilon' = \frac{\Delta d}{d}$$

Деформации ε и ε' всегда имеют разные знаки: $\varepsilon' = -\mu\varepsilon$, где μ – положительный коэффициент, зависящий от свойств материала и называемый ***коэффициентом Пуассона***.

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon$$

28. Закон Гука

Для малых деформаций относительная деформация ε пропорциональна напряжению σ:

$$\sigma = E\varepsilon$$

Здесь E – коэффициент пропорциональности (модуль упругости), численно равный напряжению, которое возникает при относительной деформации, равной единице.

Для случая одностороннего растяжения (сжатия) модуль упругости называется ***модулем Юнга***.

Записав $\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l} = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{F}{ES}$, получим $F = \dfrac{ES}{l}\Delta l = k \cdot \Delta l$ **– закон Гука:** удлинение стержня при упругой деформации пропорционально действующей на стержень силе (здесь k – коэффициент упругости).

Элементы механики жидкостей

29. Давление в жидкости и газе

Свойства жидкостей и газов во многом *отличаются*. Молекулы газа, совершая хаотическое движение, равномерно заполняют весь предоставленный им объём. В жидкостях, в отличие от газов, среднее расстояние между молекулами остаётся практически постоянным. Жидкость, сохраняя объём, принимает форму сосуда, в котором она заключена.

Однако *в ряде случаев*, когда жидкости и газы можно рассматривать как *сплошную среду*, их поведение описывается одинаковыми законами – законами ***гидроаэромеханики***. Поэтому пользуются единым термином ***"жидкость".***

В физике используется *физическая модель* **несжимаемой жидкости** – жидкости, плотность которой всюду одинакова и не меняется со временем.

На каждый элемент поверхности ΔS тела, помещённого в жидкость, со стороны молекул жидкости действует сила ΔF, направленная перпендикулярно поверхности.

Давлением жидкости называется физическая величина, определяемая нормальной силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади: ⟹

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}$$

***Единица давления* – паскаль (Па)**. 1 Па равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределённой по нормальной к ней поверхности площадью 1 м^2 (1 Па= 1 Н/м^2).

Давление при равновесии жидкостей или газов подчиняется **закону Паскаля:** Давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причём давление одинаково передаётся по всему объёму, занятому покоящейся жидкостью.

При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, поэтому *свободная поверхность жидкости всегда горизонтальна* вдали от стенок сосуда.

Если жидкость ***несжимаема***, то её плотность не зависит от давления. Тогда при поперечном сечении S столба жидкости, его высоте h и плотности ρ вес $P = \rho g S h$, а давление на нижнее основание изменяется ***линейно*** с высотой:

$$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho g S h}{S} = \rho g h.$$

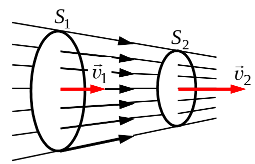
Давление $\rho g h$ называется ***гидростатическим***.

Сила давления на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость действует сила, определяемая **законом Архимеда:** на тело, погруженное в жидкость или газ, действует со стороны этой жидкости (газа) направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа):

$$F_A = \rho g V,$$

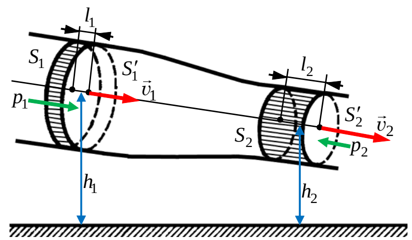
где ρ – плотность жидкости, V – объём погруженного в жидкость тела.

30. Уравнение неразрывности



Движение жидкости называется ***течением***, а совокупность частиц движущейся жидкости – ***потоком***.

Графически движение жидкостей изображается с помощью ***линий тока***, которые проводятся так, что касательные к ним совпадают по направлению с вектором скорости жидкости в данный момент времени.



Линии тока проводятся так, чтобы густота их была больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течёт медленнее.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется ***трубкой тока***.

Течение жидкости называется ***установившимся*** (или ***стационарным***), если форма и расположение линий тока, а также значения скоростей в каждой её точке со временем не изменяются.

Рассмотрим трубку тока, выбрав два сечения S_1 и S_2, перпендикулярные направлению скорости. За время Δt через сечение S проходит объём жидкости $Sv\Delta t$. Если жидкость несжимаема, то через S_2 за 1 с пройдёт такой же объём жидкости, что и через S_1:

$S_1v_1 = S_2v_2$ или $Sv = \text{const}$ – ***уравнение неразрывности.***

Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.

31. Уравнение Бернулли

Идеальной жидкостью называется воображаемая жидкость, в которой отсутствуют силы внутреннего трения.

В стационарно текущей *идеальной жидкости* выбираем трубку тока, ограниченную сечениями S_1 и S_2. По закону сохранения энергии изменение полной энергии жидкости массой m в местах сечений S_1 и S_2 равно работе внешних сил по перемещению этой массы жидкости: $E_2 - E_1 = A$.

$$E_1 = \frac{mv_1^2}{2} + mgh_1, \quad E_2 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2, \quad A = F_1l_1 + F_2l_2, \quad l_1 = v_1\Delta t, \quad l_2 = v_2\Delta t,$$
$$F_1 = p_1S_1, \quad F_2 = -p_2S_2.$$

Следовательно:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 + p_1S_1v_1\Delta t = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 + p_2S_2v_2\Delta t.$$

Согласно уравнению непрерывности, объём, занимаемый жидкостью:

$$\Delta V = S_1v_1\Delta t = S_2v_2\Delta t.$$

Используя $m = \rho\Delta V$, где ρ – плотность жидкости, получим

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}$$ – ***уравнение Бернулли***,

где p – ***статическое давление*** (давление жидкости на поверхности обтекаемого тела); ρgh – ***гидростатическое давление***; $\frac{\rho v^2}{2}$ – ***динамическое давление***.

Уравнение Бернулли – это выражение закона сохранения энергии применительно к установившемуся течению идеальной жидкости.

Из уравнения Бернулли и уравнения неразрывности следует, что при течении жидкости по трубе, имеющей различные сечения, скорость жидкости больше в местах сужения, а статическое давление больше в более широких местах.

32. Вязкость (внутреннее трение)

Вязкость – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

При перемещении одних слоёв ***реальной жидкости*** относительно других возникают *силы внутреннего трения*, направленные по *касательной* к поверхности слоёв.

Более быстрые слои ускоряют более медленные, и, наоборот, медленные слои тормозят прилегающие к ним быстрые слои. ***Градиент скорости*** $\Delta v/\Delta x$ показывает, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении x перпендикулярном направлению движения слоёв.

Сила внутреннего трения пропорциональна градиенту скорости и рассматриваемой площади поверхности слоя S: $\Rightarrow$ $F = \eta\left|\frac{\Delta v}{\Delta x}\right|S$

Коэффициент пропорциональности η, зависящий от природы жидкости, называется ***динамической вязкостью*** (или просто ***вязкостью***).

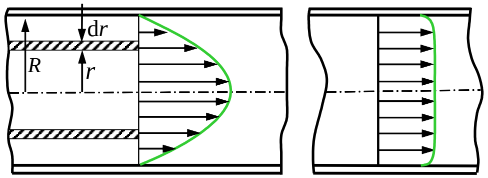
Единица вязкости – **паскаль-секунда** – динамическая вязкость среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем равным 1 м/с на 1 м, возникает сила внутреннего трения 1 Н на 1 м^2 поверхности касания слоёв (1 Па с = 1 Н с/м^2).

Чем больше вязкость, тем сильнее жидкость отличается от идеальной, тем больше силы внутреннего трения в ней возникают. *Вязкость зависит от температуры*, причём характер этой зависимости для жидкостей и газов различен (для жидкостей η с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот, увеличивается), что указывает на *различие* в них *механизмов внутреннего трения.*

33. Два режима течения жидкостей

Течение называется ***ламинарным (слоистым)***, если вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних слоёв, *не перемешиваясь* с ними.

Ламинарное течение жидкости наблюдается при небольших скоростях её движения. Внешний слой жидкости, примыкающий к поверхности трубы, в которой она течёт, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к ней и остаётся неподвижным. Скорости последующих слоёв тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы, и наибольшей скоростью обладает слой, движущийся вдоль оси трубы (рис. (*a*)).



(*a*) (*b*)

Течение называется ***турбулентным (вихревым)***, если частицы жидкости *переходят* из слоя в слой (имеют составляющие скоростей, перпендикулярные течению). Это сопровождается интенсивным *перемешиванием* жидкости (газа) и *вихреобразованием*.

Скорость частиц быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно, вследствие интенсивного перемешивания (рис. (*b*)).

Количественно переход от одного режима течения к другому характеризуется ***числом Рейнольдса***, Re.

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho\langle v\rangle d}{\eta} = \frac{\langle v\rangle d}{\gamma}$$

Здесь $\gamma = \eta/\rho$ – *кинематическая вязкость*; ρ – плотность жидкости; $\langle v\rangle$ – средняя по сечению трубы скорость жидкости; d – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ($\mathrm{Re} \le 1000$) наблюдается ламинарное течение, *переход от ламинарного* течения к *турбулентному* происходит в области $1000 \le \mathrm{Re} \le 2000$, а при Re=2300 (для гладких труб) течение – турбулентное.

34. Методы определения вязкости

1. Метод Стокса основан на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, плотностью ρ и радиусом r, падающий в жидкости вязкостью η и плотностью ρ' вертикально вниз со скоростью υ, действуют три силы: сила тяжести $P=\frac{4}{3}\pi r^3\rho g$, сила Архимеда $F_A=\frac{4}{3}\pi r^3\rho' g$ и сила сопротивления $F=6\pi\eta r\upsilon$. При равномерном движении $P-F_A-F=0$, откуда:

$$\eta=\frac{2(\rho-\rho')gr^2}{9\upsilon}.$$

2. Метод Пуазейля. Этот метод основан на ламинарном течении жидкости в тонком капилляре. Рассмотрим капилляр радиусом R и длиной l. В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом r и толщиной $\mathrm{d}r$ (рис. *а*).

Сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность этого слоя $F=-\eta\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}r}\mathrm{d}S=-\eta\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}r}2\pi rl$. При установившемся течении эта сила уравновешивается силой давления, действующей на основание того же цилиндра $-\eta\frac{\mathrm{d}\upsilon}{\mathrm{d}r}2\pi rl=\Delta p\pi r^2$, откуда $\mathrm{d}\upsilon=-\frac{\Delta p}{2\eta l}r\,\mathrm{d}r$. После интегрирования с учётом того, что скорость жидкости у стенок равна нулю, получаем $\upsilon=\frac{\Delta p}{4\eta l}(R^2-r^2)$. Отсюда видно, что скорости частиц жидкости распределяются по параболическому закону (рис. *а*), причём вершина параболы лежит на оси капилляра. За время t из капилляра вытечет жидкость, объём которой:

$$V=\int_0^R \upsilon t 2\pi r\,\mathrm{d}r=\frac{2\pi\Delta pt}{4\eta l}\int_0^R r(R^2-r^2)\mathrm{d}r=\frac{2\pi\Delta pt}{4\eta l}\left(\frac{r^2R^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right)=\frac{\pi R^4\Delta pt}{8\eta l},$$

откуда вязкость:
$$\eta=\frac{\pi R^4\Delta pt}{8Vl}.$$

Потенциальное поле сил

Потенциальное поле – поле, в котором работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положений. Силы, действующие в таких полях, называются ***консервативными*** (например, сила тяготения). Если же работа, совершаемая силой, зависит от траектории перемещения тела из одной точки в другую, то такая сила называется ***диссипативной*** (например, сила трения).

***Работа консервативных (потенциальных) сил* при элементарном изменении конфигурации системы равна *приращению потенциальной энергии*, взятому со знаком *минус*, так как работа совершается за счёт убыли потенциальной энергии:**

$$\mathrm{d}A=-\mathrm{d}W.$$

Поскольку $\vec F\,\mathrm{d}\vec r=-\mathrm{d}W$, то $W=-\int\vec F\,\mathrm{d}\vec r+\mathrm{const}$, отсюда: $\vec F=-\mathrm{grad}W=-\nabla W$, где вектор $\mathrm{grad}W=\frac{\partial W}{\partial x}\vec i+\frac{\partial W}{\partial y}\vec j+\frac{\partial W}{\partial z}\vec k$ называется ***градиентом*** скаляра W и обозначается $\nabla W\equiv\mathrm{grad}W$. Символ ∇ ("набла") обозначает символический вектор, называемый оператором Гамильтона или набла-оператором (стр.1-30):

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec i+\frac{\partial}{\partial y}\vec j+\frac{\partial}{\partial z}\vec k$$

Конкретный вид функции W *зависит от характера силового поля.*

1) Потенциальная энергия тела массы m на высоте h: ⇨ $W=-\int_0^h\vec P\,\mathrm{d}\vec r=\int_0^h mg\,\mathrm{d}x=mgh$.

2) Потенциальная энергия упругодеформированного тела: ⇨ $W=-\int_0^x F\,\mathrm{d}x=\int_0^x kx\,\mathrm{d}x=\frac{kx^2}{2}$.

35. Поле сил тяготения

***Закон всемирного тяготения*: между любыми двумя материальными точками действует сила взаимного притяжения, прямо пропорциональная произведению масс этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Здесь $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м²·кг⁻² – ***гравитационная постоянная***.

Эта сила называется ***гравитационной***, *или* ***силой всемирного тяготения***. Силы тяготения всегда являются силами притяжения и направлены вдоль прямой, проходящей через взаимодействующие тела.

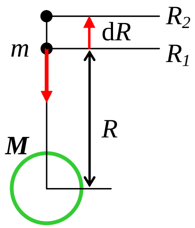
Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется с помощью поля тяготения, или гравитационного поля.

На примере гравитационного поля рассмотрим понятия ***напряжённости*** поля и ***потенциала*** поля.

Напряжённость поля тяготения это физическая величина, равная отношению силы, действующей со стороны поля на помещённое в него тело (материальную точку), к массе этого тела. ⇨ $\vec E=\frac{\vec F}{m}$

Напряжённость является ***векторной силовой*** *характеристикой поля тяготения.*

В гравитационном поле Земли $\vec F=m\vec g$, откуда $E=g=\frac{F}{m}=\frac{GM}{R^2}=\frac{GM}{(R_З+h)^2}$, где $R_З$ – радиус Земли, масса которой M, h – расстояние от центра тяжести тела до поверхности Земли. При перемещении тела массой m на расстояние $\mathrm{d}R$ поле тяготения совершает работу $\mathrm{d}A=\vec F\,\mathrm{d}\vec R=-G\frac{mM}{R^2}\mathrm{d}R$ (знак минус потому, что сила и перемещение *противонаправлены*).



При перемещении тела с расстояния R_1 до расстояния R_2:

$$A=-\int_{R_1}^{R_2}G\frac{mM}{R^2}\mathrm{d}R=-m\left(\frac{GM}{R_2}-\frac{GM}{R_1}\right).$$

Работа *не зависит от траектории перемещения, а определяется только начальным и конечным положениями тела.*

Следовательно, силы тяготения *консервативны*, а поле тяготения является *потенциальным*. Работа консервативных сил равна изменению потенциальной энергии системы с обратным знаком. $A=-(W_2-W_1)$. Поэтому, ***потенциальная энергия поля сил тяготения***: $W=-G\dfrac{mM}{R}$.

Для любого потенциального поля можно определить ***скалярную энергетическую*** *характеристику поля* ***– потенциал.***

Потенциалом поля тяготения в данной точке поля называется скалярная величина, равная отношению потенциальной энергии материальной точки, помещённой в рассматриваемую точку поля, к массе материальной точки:

$$\varphi=\frac{W}{m}=-G\frac{M}{R}$$

Рассмотрим связь между потенциалом поля тяготения и его напряжённостью:

$$\mathrm{d}A=-m\,\mathrm{d}\varphi,\quad \mathrm{d}A=F\,\mathrm{d}r=mg\,\mathrm{d}r \;\Rightarrow\; g=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} \quad \text{или} \quad \vec{g}=-\mathrm{grad}\,\varphi=-\nabla\varphi.$$

В общем случае ***для любого потенциального поля между напряжённостью и потенциалом существует связь***:

$$\vec{E}=-\mathrm{grad}\,\varphi=-\nabla\varphi.$$

Эта формула является следствием соотношения $\vec{F}=-\mathrm{grad}\,\Pi=-\nabla\Pi$. Знак ***минус*** указывает на то, что вектор напряжённости направлен в сторону ***убывания*** потенциала.

36. Космические скорости

Первой космической скоростью называют такую минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться вокруг Земли по круговой орбите, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли.

$$\frac{GmM}{R^2}=ma_n=m\frac{\upsilon_1^2}{R} \text{ (2й закон Ньютона)};\quad g=\frac{P}{m}=\frac{GM}{R^2} \text{ (}R-\text{ радиус Земли).}$$

$$\upsilon_1=\sqrt{gR}=7{,}9\ \text{км/с} \quad \text{(у поверхности Земли (}h\to 0\text{)).}$$

Второй космической скоростью называется наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и превратиться в спутник Солнца. В этом случае кинетическая энергия тела должна быть равна работе, совершаемой против сил тяготения:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2}=\int_R^\infty G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r=\frac{GmM}{R} \;\Rightarrow\; \upsilon_2=\sqrt{2gR}=11{,}2\ \text{км/с}.$$

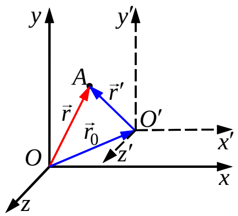
Третьей космической скоростью называется скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца: $\upsilon_3=16{,}7\ \text{км/с}$.

Элементы специальной теории относительности

37. Преобразования Галилея

В классической механике, при скоростях тел значительно меньших, чем скорость света $(\upsilon\ll c)$, справедлив *механический принцип относительности*

(принцип относительности Галилея): ***законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.***



Рассмотрим две системы отсчёта: инерциальную систему K (с координатами x,y,z), которую будем считать неподвижной, и систему K' (с координатами x',y',z'), движущуюся относительно K равномерно и прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{u}=\text{const}$.

В начальный момент времени начала координат O и O' этих систем совпадают.

В произвольный момент времени t: $\vec{r}_0=\vec{u}t$.

Для произвольной точки A: $\vec{r}=\vec{r}\,'+\vec{r}_0=\vec{r}\,'+\vec{u}t$. Или в проекциях на оси координат:

$$x=x'+u_xt,\quad y=y'+u_yt,\quad z=z'+u_zt.$$

Эти соотношения называются ***преобразованиями координат Галилея.***

Продифференцировав их по времени, получим *правило сложения скоростей в классической механике*: $\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}\,'+\vec{u}$.

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}\,'+\vec{u}$$

В классической механике предполагается, что ход времени не зависит от относительного движения систем отсчёта, поэтому к преобразованиям Галилея можно добавить ещё одно соотношение: $t=t'$.

Ускорение в системах отсчёта, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно, одинаково: $\vec{a}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(\vec{\upsilon}-\vec{u})}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{\upsilon}\,'}{\mathrm{d}t}=\vec{a}\,'$. Это и служит доказательством принципа относительности Галилея.

38. Постулаты Эйнштейна

1) ***Принцип относительности***: никакие опыты, проведённые внутри данной инерциальной системы отсчёта, не дают возможность обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; *все законы природы инвариантны* по отношению к переходу от одной системы отсчёта к другой.

2) ***Принцип инвариантности скорости света***: *скорость света в вакууме* не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и ***одинакова*** *во всех инерциальных системах отсчёта*.

39. Преобразования Лоренца

Пусть система O' движется относительно системы O со скоростью $\upsilon=\text{const}$, причём $\upsilon\approx c$ (c – скорость света (скорость распространения электромагнитных взаимодействий) в вакууме). Обозначим отношение скоростей υ и c через $\beta=\upsilon/c$. Пусть вектор скорости $\vec{\upsilon}$ направлен вдоль оси OX. Тогда ***релятивистские преобразования*** координат и времени ***будут иметь вид***: ⇨

$$x=\frac{x'+\upsilon t'}{\sqrt{1-\beta^2}},\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\frac{t'+\dfrac{\upsilon x'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Эти соотношения – ***преобразования Лоренца*** – при $\upsilon\ll c$ переходят в преобразования Галилея.

Они устанавливают взаимосвязь пространства и времени – в закон преобразования координат входит время, а в закон преобразования времени – пространственные координаты.

Следствием этого является тот факт, что если два события в системе O происходят одновременно, но в разных точках ($t_1=t_2,\ x_1\neq x_2$), то в системе O'

эти события, оставаясь пространственно разобщёнными, оказываются и неодновременными.

Пусть в некоторой точке x в системе O происходит событие длительностью $\tau = t_2 - t_1$, то в системе O' длительность этого же события:

$$\tau' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{t_1 - \upsilon x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{1-\beta^2}} > \tau .$$

Таким образом, длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчёта, относительно которой эта точка неподвижна. Следовательно, часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчёта, идут медленнее покоящихся часов.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы O'. Его длина в системе O' будет $l_0' = x_2' - x_1'$. Чтобы определить длину $l = x_2 - x_1$ этого стержня в системе O, относительно которой он движется со скоростью υ, измерим координаты его концов x_1 и x_2 в один и тот же момент времени t.

$$l_0' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1 - \upsilon t}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l}{\sqrt{1-\beta^2}} > l .$$

Размер тела, движущегося относительно инерциальной системы отсчёта, уменьшается в направлении движения, причём ***лоренцово сокращение длины*** тем больше, чем больше скорость движения. Поперечные размеры тел не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.

Если материальная точка движется в системе O' вдоль оси x' со скоростью υ', а сама система O' движется со скоростью u относительно системы O, то ***релятивистский закон сложения скоростей будет иметь вид*:**

$$\upsilon = \frac{\upsilon' + u}{1 + \dfrac{u\upsilon'}{c^2}}$$

В качестве величины, ***инвариантной*** по отношению к преобразованию координат в четырёхмерном пространстве Эйнштейна **(не зависящей от выбора системы отсчёта)**, вводится ***интервал между событиями*:**

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2-t_1)^2 - (x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2} ,$$

где $\sqrt{(x_2-x_1)^2 - (y_2-y_1)^2 - (z_2-z_1)^2} = l_{12}$ – расстояние между точками обычного трёхмерного пространства. Обозначив $t_{12} = t_2 - t_1$, получим:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2} .$$

40. Основные соотношения релятивистской динамики

Релятивистская масса m движущихся релятивистских частиц (тел) зависит от их скорости.

$$\beta = \frac{\upsilon}{c}$$

m_0 – ***масса покоя*** частицы, т. е. масса, измеренная в той инерциальной системе отсчёта, в которой частица находится в покое.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Релятивистский импульс $\vec{p}$. *Релятивистский импульс системы* ***сохраняется***. Закон сохранения релятивистского импульса – следствие *однородности пространства*.

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Основной закон релятивистской динамики:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

Законы классической динамики получаются из законов релятивистской динамики в предельном случае $\upsilon \ll c$ (или $c \to \infty$). Т. о. *классическая механика – это механика макротел, движущихся с малыми скоростями* (*по сравнению со скоростью света в вакууме*).

Полная энергия тела массы m:

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Соотношение $E = mc^2$ носит универсальный характер, оно применимо ко всем формам энергии, т.е. можно утверждать, что с энергией, какой бы формы она не была, связана масса $m = E/c^2$, и, наоборот, со всякой массой связана энергия. Покоящееся тело обладает энергией $E_0 = m_0 c^2$, называемой ***энергией покоя***.

Полная энергия замкнутой системы сохраняется. Закон сохранения энергии – следствие *однородности времени*.

Кинетическая энергия: $K = E - E_0 = m_0 c^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)$.

Релятивистское соотношение между полной энергией и импульсом тела:

$$E^2 = m^2c^4 = m_0^2c^4 + p^2c^2 .$$

Величина $E^2 - p^2c^2 = E_0^2$ является инвариантом системы.

В случае, когда масса покоя частицы равна нулю, то $E^2 - c^2p^2 = 0$. Следовательно, такая частица может обладать отличными от нуля энергией и импульсом только в том случае, когда она движется со скоростью света. К таким частицам относятся фотоны.

Основной вывод теории относительности – *пространство и время органически взаимосвязаны и образуют единую форму существования материи – пространство-время.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

Основные понятия математического аппарата общей физики

1. Понятие производной функции

Функция f называется *дифференцируемой* в точке x_0, если существует предел разностного отношения функции f в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} .$$

Этот предел называется ***производной*** функции f в точке x_0 и обозначается: $f'(x)$, $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $\left(\dfrac{df}{dx}\right)(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\left.\dfrac{df}{dx}\right|_{x=x_0}$.

2. Производные некоторых элементарных функций

$$(e^x)' = e^x \qquad (a^x)' = a^x \ln a \qquad (\sin x)' = \cos x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (x^n)' = nx^{n-1} \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

3. Частная производная

Пусть функция f определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_1^0,\ldots,x_n^0)$. Функция f называется дифференцируемой по x_k, если существует предел разностного отношения

$$\lim_{x_k \to x_k^0} \frac{f(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0) - f(x_1^0,\ldots,x_{k-1}^0,x_k^0,x_{k+1}^0,\ldots,x_n^0)}{x_k - x_k^0}.$$

Этот предел называется ***частной производной функции*** f (по x_k) в точке P_0 и обозначается: $\dfrac{\partial f(x_1^0,\ldots,x_n^0)}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1^0,\ldots,x_n^0)$.

4. Полный дифференциал функции f в точке P_0

$$\mathrm{d}\, f(P) = \sum_{k=1}^{n} f'_{x_k}(P_0)\cdot(x_k - x_k^0).$$

5. Определённый интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$. Разобьём этот отрезок на "элементарные" отрезки введением n точек x_i следующим образом: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$.

Обозначим через $\mathrm{d}x$ длину элементарного отрезка $\mathrm{d}x = x_i - x_{i-1}$. В каждом элементарном отрезке выберем произвольное число ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$.

Число $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ называется ***интегральной суммой***.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a,b]$, если существует число I со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при любом разбиении на отрезки $\mathrm{d}x$, для которого $\mathrm{d}x < \delta$, выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$ независимо от выбора ξ_i.

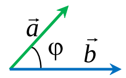
Число I называется ***определённым интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается $I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Здесь x называется ***переменной интегрирования***, a и b – соответственно *нижним и верхним пределами* интегрирования.

6. Вектор

Геометрический вектор $\vec{a}$ – это направленный отрезок в пространстве. Длина вектора $\vec{a}$ называется его ***модулем*** и обозначается $a = |\vec{a}|$.

В ***прямоугольной декартовой системе*** координат каждый вектор $\vec{a}$ можно однозначно представить в виде $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, где $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ – единичные векторы (***орты***) по осям координат x, y, z. Числа a_x, a_y, a_z называются *прямоугольными декартовыми* ***координатами*** вектора $\vec{a}$.

7. Скалярное произведение векторов

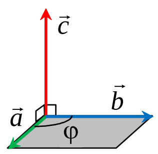


Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть **число**

$$\vec{a}\vec{b} = (\vec{a},\vec{b}) = ab\cos\varphi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

8. Векторное произведение векторов



Под векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ понимают ***вектор*** $\vec{c}$, имеющий длину $c = ab\sin\varphi$ (площадь параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах) и направленный перпендикулярно к $\vec{a}$ и $\vec{b}$, причём так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют ***правую тройку векторов***.

Обозначение: $\vec{c} = [\vec{a},\vec{b}] \equiv \vec{a}\times\vec{b}$.

9. Скалярное поле

Если каждой точке M пространства ставится в соответствие скалярная величина U, то возникает ***скалярное поле*** $U(M)$ (например, поле температуры неравномерно нагретого тела, поле плотности в неоднородной среде, поле электростатического потенциала). Если M имеет декартовы координаты (x,y,z), то пишут $U = U(x,y,z)$ или $U = U(\vec{r})$ с векторным аргументом (радиусом вектором) $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

10. Векторное поле

Если каждой точке M ставится в соответствие вектор $\vec{A}$, то говорят о ***векторном поле*** $\vec{A}(M)$ (например, поле скоростей движущейся жидкости, гравитационное поле Солнца, поле электрической напряжённости, поле магнитной напряжённости). В декартовых координатах:

$$\vec{A} = \vec{A}(x,y,z) = \vec{A}(\vec{r}) = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор. Компоненты A_x, A_y, A_z образуют ***три скалярных поля*** и однозначно определяют $\vec{A}(\vec{r})$ – векторную функцию векторного аргумента.

11. Производная по направлению

Пусть скалярное поле $U(\vec{r})$ имеет в некоторой точке M_0 значение U_0, и пусть при перемещении $\mathrm{d}\vec{s}$ по направлению вектора $\vec{s}$ мы приходим из точки M_0 в точку M, где скалярное поле имеет значение U_s. Приращение U при этом перемещении равно $\mathrm{d}U = U_s - U_0$. Предел отношения этого приращения

$\mathrm{d}U$ к численной величине перемещения $\mathrm{d}s$ называется ***производной скаляра** U **в точке** M_0 **по направлению** $\vec{s}$*:

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \lim_{\mathrm{d}s\to 0} \frac{U_s - U_0}{\mathrm{d}s}.$$

Значение этой производной ***существенно зависит*** от выбора направления $\vec{s}$ и её ни в коем случае ***нельзя смешивать*** с обыкновенной частной производной по скалярному параметру s. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, часто такую производную обозначают: $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{s}}$.

12. Градиент

Градиентом поля $U(\vec{r})$ называется *вектор*, определяемый в каждой точке поля соотношением: $$\mathrm{grad}U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда $\dfrac{\partial U(\vec{r})}{\partial s} = \vec{n}\,\mathrm{grad}U$, где $\vec{n}$ – единичный вектор в направлении $\vec{s}$.

Часто вектор $\mathrm{grad}U$ обозначают также $\dfrac{\partial U}{\partial \vec{s}}$ или ∇U, где ∇ ("набла") обозначает символический вектор, называемый ***оператором Гамильтона*** или ***набла-оператором***: $$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}.$$

13. Поток поля через поверхность

Разобьём данную поверхность S на n элементарных площадок размером ΔS_i. Внутри каждой площадки выберем точку M_i и в этой точке построим нормальный к поверхности единичный вектор $\vec{n}$ и вектор $\overrightarrow{\Delta S_i} = \vec{n}\Delta S_i$, направление которого $\vec{n}$, а модуль ΔS_i. Тогда мы определяем:

1) поток скалярного поля: $\Im = \int_S U\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} U(M_i)\overrightarrow{\Delta S_i}$;

2) скалярный поток векторного поля: $\Im = \int_S \vec{A}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} \vec{A}(M_i)\overrightarrow{\Delta S_i}$;

3) векторный поток векторного поля: $\Im = \int_S [\vec{A},\mathrm{d}\overrightarrow{S}] = \lim_{\Delta S_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} [\vec{A}(M_i),\overrightarrow{\Delta S_i}]$.

14. Производная по объёму

Под производными по объёму скалярного или векторного полей в точке M понимают величины **трёх** типов, которые получают следующим образом.

(1) Точка M окружается замкнутой поверхностью S, которая охватывает область с объёмом V. **(2)** Вычисляется интеграл $\Re$ по поверхности S: $\Re = \oint_S U\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, или $\Re = \oint_S \vec{A}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}$, или $\Re = \oint_S [\vec{A},\mathrm{d}\overrightarrow{S}]$. **(3)** Определяется предел $\lim_{V\to 0}\dfrac{\Re}{V}$ отношения этого интеграла к объёму V, когда S стягивается в точку M, так что V стремится к нулю.

15. Дивергенция векторного поля

Дивергенцией (обозначается $\mathrm{div}\vec{A} \equiv \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial \vec{r}} \equiv \nabla\vec{A}$) векторного поля $\vec{A}(M)$ называют следующую производную по объёму поля в точке M:

$$\mathrm{div}\vec{A}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \vec{A}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}}{V}$$

Величина $\oint_S \vec{A}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ есть ***скалярный поток векторного поля*** через замкнутую поверхность S, которая окружает точку M и охватывает область G с объёмом V.

Дивергенция $\mathrm{div}\vec{A}$ есть ***мера источников поля*** $\vec{A}(M)$. Если в области G $\mathrm{div}\vec{A} = 0$, то векторное поле $\vec{A}(M)$ называется свободным от источников. Те точки поля, в которых $\mathrm{div}\vec{A} > 0$, принято называть ***источниками*** поля, а те, в которых $\mathrm{div}\vec{A} < 0$ – ***стоками*** поля.

16. Формула Гаусса-Остроградского

Для пространственной области G, ограниченной замкнутой поверхностью S:

$$\iiint_G \mathrm{div}\vec{A}\,\mathrm{d}V = \oint_S \vec{A}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

17. Оператор Лапласа

Пусть $U(M)$ – *скалярное* поле, тогда оператор Лапласа ΔU определяется следующим образом:

$$\Delta U(M) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}U(M)$$

или в декартовых координатах:

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Оператор Лапласа векторного поля: $\Delta\vec{A}(M) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{A}(M) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{A}(M)$

18. Ротор векторного поля

Ротором (вихрем) векторного поля $\vec{A}(M)$ называют следующую производную по объёму поля в точке M:

$$\mathrm{rot}\vec{A}(M) = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S [\vec{A},\mathrm{d}\overrightarrow{S}]}{V}$$

Обозначается: $\mathrm{rot}\vec{A} \equiv \left[\dfrac{\partial}{\partial \vec{r}},\vec{A}\right] \equiv [\nabla,\vec{A}]$

19. Теорема Стокса

Циркуляция векторного поля $\vec{A}(M)$ по замкнутой кривой L равна потоку ротора этого поля через поверхность S, опирающуюся на кривую L:

$$\oint_L \vec{A}\,\mathrm{d}\vec{r} = \int_S \mathrm{rot}\vec{A}\,\mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

Примечание

В этом приложении приведены определения некоторых математических понятий, часто используемых в курсе физики. Материал носит справочный характер, поскольку предполагается, что данные понятия известны читателю.

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Пропис-ные	Строч-ные	Название	Пропис-Ные	Строч-ные	Название	Пропис-ные	Строч-ные	Название
Α	α	А́льфа	Ι	ι	Йо́та	Ρ	ρ	Ро
Β	β	Бэ́та	Κ	κ	Ка́ппа	Σ	σ, ς	Си́гма
Γ	γ	Га́мма	Λ	λ	Ля́мбда	Τ	τ	Та́у
Δ	δ	Дэ́льта	Μ	μ	Мю	Υ	υ	И-псило́н
Ε	ε	Э-псило́н	Ν	ν	Ню	Φ	φ	Фи
Ζ	ζ	Дзэ́та	Ξ	ξ	Кси	Χ	χ	Хи
Η	η	Э́та	Ο	ο	О-микро́н	Ψ	ψ	Пси
Θ	ϑ	Тэ́та	Π	π	Пи	Ω	ω	О-ме́га

ПРИСТАВКИ К ОБОЗНАЧЕНИЯМ ЕДИНИЦ

фемто	10^{-15}	ф	f	милли	10^{-3}	м	m	гекто	10^{2}	г	h
пико	10^{-12}	п	p	санти	10^{-2}	с	c	кило	10^{3}	к	к
нано	10^{-9}	н	n	деци	10^{-1}	д	d	мега	10^{6}	М	M
микро	10^{-6}	мк	μ	дека	10	да	da	гига	10^{9}	Г	G

ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

Гравитационная постоянная	$G=6{,}6743\cdot10^{-11}\ \dfrac{\text{Н}\cdot\text{м}^2}{\text{кг}^2}$
Универсальная газовая постоянная	$R=8{,}31447\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{моль}\cdot\text{К}}$
Атомная единица массы	$u=1{,}66054\cdot10^{-27}$ кг
Постоянная Планка	$h=6{,}62607\cdot10^{-34}$ Дж · с
Элементарный заряд	$e=1{,}60218\cdot10^{-19}$ Кл
Масса покоя электрона	$m_e=9{,}10938\cdot10^{-31}$ кг
Масса покоя протона	$m_p=1{,}67262\cdot10^{-27}$ кг
Молярный объём идеального газа при нормальных условиях ($p_0=101325$ Па, $T_0=273{,}15$ К)	$V_0=22{,}4138\cdot10^{-3}\ \dfrac{\text{м}^3}{\text{моль}}$
Число Авогадро	$N_A=6{,}02214\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k=\dfrac{R}{N_A}=1{,}38065\cdot10^{-23}\ \dfrac{\text{Дж}}{\text{К}}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma=5{,}6704\cdot10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0=\dfrac{1}{\mu_0c^2}=8{,}854188\cdot10^{-12}\ \dfrac{\text{Ф}}{\text{м}}$
Магнитная постоянная	$\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}\ \dfrac{\text{Гн}}{\text{м}}$
Скорость света в вакууме	$c=2{,}99792\cdot10^{8}$ м/с

Содержание