ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие предназначено для студентов Белгородского государственного технологического университета им. В.Г. Шухова (БГТУ) всех специальностей заочной формы обучения с применением дистанционных технологий. Пособие состоит из теоретических сведений, примеров решения типовых задач, вопросов для самоконтроля знаний и заданий для самостоятельной работы.

Приведенные примеры помогут усвоить следующую логическую последовательность решения любой физической задачи: анализ физической сущности явления, применение необходимых законов природы, составление уравнения (системы уравнений), математическое решение.

При самостоятельной подготовке к решению расчётно-графических заданий , зачётам и экзаменам рекомендуется использовать пособие в следующем порядке:

- усвоить основные теоретические положения, законы, формулы,

- решить задачи, тексты которых приведены в каждом разделе.

Настоятельно рекомендуется придерживаться следующего порядка действий при решении физических задач:

- тщательно изучить условие задачи, понять смысл физического явления, описанного в тексте задачи;

- записать краткое условие задачи, используя обозначения физических величин, выразив значения физических величин в системе СИ;

- выполнить рисунок, поясняющий условие задачи, и обозначить символами физические величины, необходимые для решения;

- установить основные законы и теоретические соотношения между физическими величинами, необходимые для решения задачи;

- составить уравнение (систему уравнений) для поиска неизвестных величин;

- решить задачу в алгебраическом (общем, без подстановки числовых значений) виде; на каждом этапе алгебраических преобразований рекомендуется контролировать совпадение размерностей левой и правой частей равенств — это поможет своевременно обнаружить возможные алгебраические ошибки;

- вычислить искомую величину, округлить её до разумного предела;

- записать в ответе численное значение найденной величины и сокращенное наименование единицы ее измерения (в системе СИ, если не оговорено другое).

1. КИНЕМАТИКА

§1.1 Кинематика материальной точки

Механикой называется раздел физики, изучающий различные виды механического движения, причины их возникновения и условия относительного покоя.

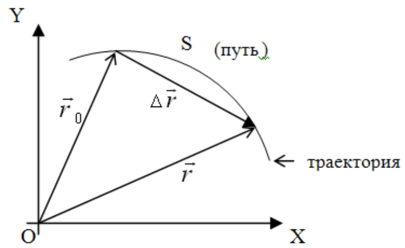
Механика включает в себя такие подразделы, как: ***кинематика, динамика*** и ***статика***. В кинематике для описания механического движения используется определенный математический аппарат, при этом причины возникновения движения тел не рассматриваются. В динамике, наоборот, при описании механического движения, прежде всего, рассматриваются причины возникновения движения. Статика изучает условия равновесия тел, на которые действуют другие тела.

Механическим движением *называется изменение положения тела в пространстве относительно других тела с течением времени.*

Материальной точкой *называется тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.*

Для описания механического движения материальной точки используется система отсчета.

Системой отсчета *называется совокупность тела отсчета, системы координат и часов для измерения времени.*



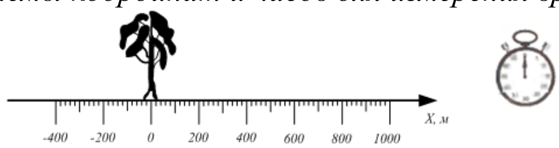


Рис. 1.1

Траекторией называется линия, по которой движется материальная точка.

Путём **S** называется длина участка траектории, по которой двигалась материальная точка за данный промежуток времени (см. рис.1.1).

1.1.1 Способы описания движения

Наиболее часто для описания движения материальной точки используется прямоугольная система координат. Чтобы полностью описать движение реального тела, нужно определить законы движения каждой его точки. Поэтому изучение движения реального тела начинают с рассмотрения движения материальной точки.

Законом движения называется зависимость радиуса-вектора или координат движущейся материальной точки от времени.

$$\vec{r}(t) = \overrightarrow{f(t)}\,, \qquad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\vec{r}}$ – радиус вектор движущейся точки.

Радиус – вектор $\vec{r}$ – это вектор, проведённый из начала координат в рассматриваемую материальную точку (см. рис.1.2).

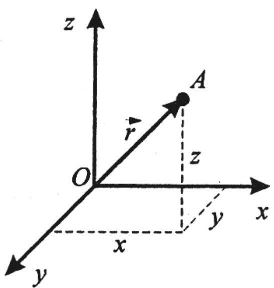


Рис. 1.2

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,, \quad м\,, \text{ метр}, \qquad (1.2)$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы направлений (орты);

x, y, z — координаты точки.

Модуль радиус – вектора равен : $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. (1.3)

Единицей измерения длины является ***метр***, равный расстоянию, проходимому светом в вакууме за $1/(3 \cdot 10^8)$ секунды.

Секунда – единица измерения времени, равна $9.1 \cdot 10^9$ периодам излучения атома цезия-133.

Перемещением $\Delta\vec{r}$ называется вектор, направленный из начального положения материальной точки в её конечное положение (см. рис. 1.1):

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0\,, \qquad (1.4)$$

где $\vec{r}_0$ и $\vec{r}$ - это начальный и конечный радиус - вектор материальной точки, $\vec{r} = м$,

1.1.2 Скорость

Для характеристики быстроты перемещения тела в пространстве вводят понятие **скорости** $\vec{v}$.

Различают следующие виды скоростей:

1. ***средняя скорость*** (или ***средняя скорость по перемещению***) $\langle\vec{v}\rangle$ (это векторная величина, равная отношению перемещения тела $\Delta\vec{r}$ за какой-либо промежуток времени Δt к величине этого промежутка времени (см. рис.1.3)):

$$\langle\vec{v}\rangle = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \ldots + \vec{r}_n}{t_1 + t_2 + \ldots t_n}. \qquad (1.5)$$

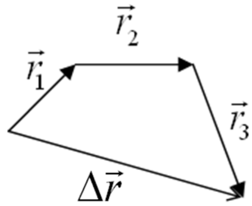


Рис. 1.3

Так как $\Delta t > 0$, то вектор средней скорости всегда направлен по вектору перемещения**,** т.е. $<\vec{v}>\uparrow\uparrow\Delta\vec{r}$.

2. ***средняя путевая скорость*** $\langle v\rangle$ (это скалярная величина, равная отношению пути S пройденного телом за какой- либо промежуток времени t к величине этого промежутка (см. рис.1.4)):

$$\langle v\rangle = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + \ldots + S_n}{t_1 + t_2 + \ldots + t_n} \qquad (1.6)$$

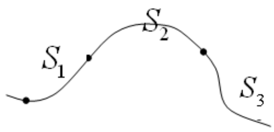


Рис. 1.4

Особый случай: Если тело за рассматриваемый промежуток времени движется в одном и том же направлении с одним и тем же по величине и направлению ускорением, то среднюю путевую скорость тела за этот промежуток времени можно определить по формуле:

$$\langle v\rangle = \frac{v_1 + v_2}{2}, \qquad (1.7)$$

где v_1 и v_2 - это начальная и конечная скорости тела на этом участке.

3. ***Мгновенная скорость*** $\vec{v}$ (это скорость материальной точки в данное мгновение)

Мгновенную скорость можно получить, если в уравнении (1.5) интервал времени Δt устремить к нулю ($\Delta t \to 0$), тогда предельное значение, к которому будет стремиться вектор средней скорости, называется *мгновенной скоростью*:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}\,' \qquad (1.8)$$

Такие пределы в математике получили название *производной*.

Таким образом:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \qquad (1.9)$$

где $v_x = \dfrac{dx}{dt}, v_y = \dfrac{dy}{dt}, v_z = \dfrac{dz}{dt}$ - проекции скорости $\vec{v}$ на оси координат.

(то есть, ***мгновенной скоростью*** *называется векторная величина, равная первой производной радиус-вектора материальной точки по времени***).**

Размерность скорости: $v = \dfrac{м}{с}$, метр в секунду.

Модуль скорости материальной точки равен: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. (1.10)

Физический смысл скорости: *она показывает, какое перемещение совершает материальная точка за единицу времени при равномерном движении.*

(пример: $v = 5\dfrac{м}{с}$ означает, что тело за каждую секунду перемещается на 5 м.)

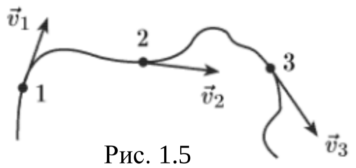


Рис. 1.5

Вектор мгновенной скорости направлен по касательной к траектории движения материальной точки (см. рис. 1.5).

- Если скорость тела не меняется по величине с течением времени, то такое движение называется ***равномерным*** (см. рис.1.6),

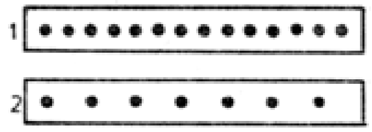


Рис. 1.6

- если скорость тела изменяется каждую секунду на одну и ту же величину, то такое движение называется ***равнопеременным*** (см. рис.1.7)**.**

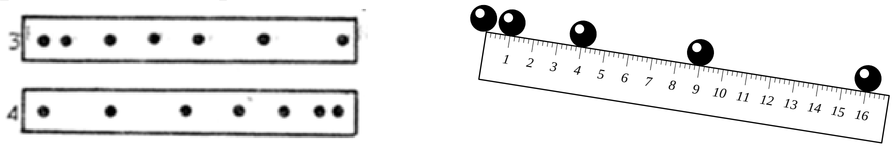


Рис. 1.7

Геометрический смысл пути

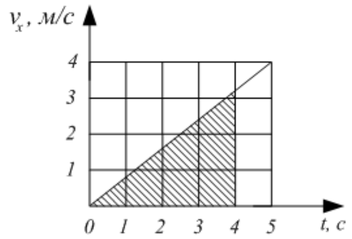


Рис. 1.8

Иногда при решении задач о нахождении пройденного точкой пути удобно пользоваться геометрическим смыслом пути:

путь, пройденный телом, равен площади под кривой графика изменения скорости этого тела от времени (см. рис.1.8).

1.1.3 Ускорение

Для характеристики быстроты изменения скорости по величине и направлению вводят понятие **ускорения** $\vec{a}$ (было введено Галилеем при изучении падения тел под действием силы тяжести).

Различают:

- ***среднее ускорение*** (векторная физическая величина, равная отношению изменения скорости тела $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это изменение произошло)

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \qquad (1.11)$$

- ***мгновенное ускорение*** (векторная физическая величина, равная пределу отношения изменения скорости тела $\Delta\vec{v}$ к промежутку времени Δt, в течение которого это изменение произошло).

Мгновенное ускорение $$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}, \qquad (1.12)$$

где $a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}$ - проекции ускорения на оси координат.

(то есть, ***мгновенным ускорением*** *называется векторная величина, равная первой производной скорости материальной точки по времени)***.**

Модуль вектора мгновенного ускорения равен: $$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (1.13)$$

Размерность ускорения: $a = \frac{м}{с^2}$, метр на секунду в квадрате.

Физический смысл ускорения: *оно показывает, на сколько метров в секунду изменяется скорость тела за единицу времени при равнопеременном движении.*

(например: $a = 10\frac{м}{с^2}$ означает, что скорость тела изменяется на $10\frac{м}{с^2}$ за каждую секунду.)

Направление вектора ускорения $\vec{a}$ совпадает с направлением вектора $\Delta\vec{v}$.

При прямолинейном движении тела ускорение:

- сонаправлено с вектором $\vec{v}$ в случае ускоренного движения тела ($\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{v}$),
- противоположно направлено вектору $\vec{v}$ при замедленном движении тела ($\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{v}$).

При криволинейном движении вектор ускорения $\vec{a}$ в общем случае образует с вектором мгновенной скорости $\vec{v}$ некоторый угол α.

В этом случае вектор полного ускорения $\vec{a}$ удобно разложить на две составляющие $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ (см. рис.1.9),

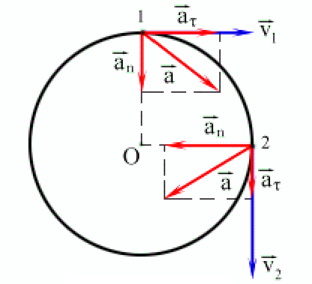


Рис. 1.9

где $\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt}$ - ***тангенциальное*** (или ***касательное***) ускорение (характеризует быстроту изменения вектора скорости по величине),

$a_n = \frac{v^2}{r}$ - ***нормальное*** (или ***центростремительное***) ускорение (характеризует быстроту изменения вектора скорости по направлению)

Из рис. 1.9 следует, что $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ и $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$ (1.14)

При прямолинейном движении тела нормальное ускорение равно нулю $a_n = 0$, поэтому мгновенное ускорение совпадает с тангенциальным.

1.1.4 Графики движения

Графиками движения называются графики зависимости пути или скорости тела от времени.

Из анализа графиков движения можно получить дополнительную информацию, например:

Тангенс угла наклона касательной к графику зависимости пути, пройденного телом, от времени равен мгновенной скорости тела в данный момент времени (см. рис.1.10), то есть

$$tg\alpha = \frac{ds}{dt} = v \qquad (1.15)$$

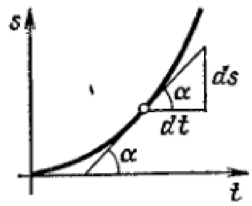


Рис. 1.10

По изгибу графика зависимости пути, пройденного телом, от времени можно определить, как двигалось тело на данном участке:

ускоренно ($a > 0$) или замедленно ($a < 0$) (см. рис.1.11)..

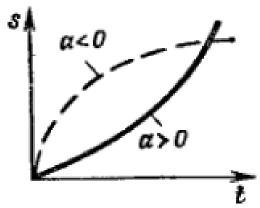


Рис. 1.11

Тангенс угла наклона касательной к графику зависимости скорости тела от времени равен мгновенному ускорению тела в данный момент времен (см. рис.1.12), то есть

$$tg\beta = \frac{dv}{dt} = a \qquad (1.16)$$

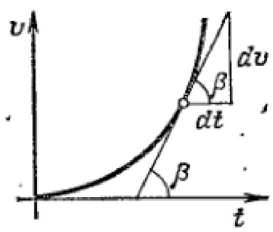


Рис. 1.12

Различают следующие наиболее простые виды движения:

- ***равномерное прямолинейное движение*** (это движение с постоянной по модулю и направлению скоростью),
- ***равноускоренное прямолинейное движение*** (это прямолинейное движение, при котором скорость тела постоянно увеличивается на одну и ту же величину за единицу времени. При этом ускорение параллельно скорости и постоянно по модулю),
- ***равнозамедленное прямолинейное движение*** (это прямолинейное движение, при котором скорость тела постоянно уменьшается на одну и ту же величину за единицу времени. При этом ускорение направлено противоположно скорости и постоянно по модулю),
- ***равнопеременное движение*** – движение с постоянным по модулю и направлению ускорением.

Совокупность координат $x\ t$, $y\ t$ в момент времени t определяет закон движения материальной точки в координатной форме.

Уравнения равнопеременного движения (в проекциях на оси координат) имеют вид:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{ox}\,t + \dfrac{a_x t^2}{2} \\ y = y_0 + v_{oy}\,t + \dfrac{a_y t^2}{2} \end{cases}, \qquad \begin{cases} v_x = v_{0x} + a_x t \\ v_y = v_{oy} + a_y t \end{cases}. \tag{1.17}$$

При этом следует помнить, что проекции векторов скорости и ускорения на оси координат могут быть как положительными (если вектора сонаправлены с положительным направлением оси), так и отрицательными (если вектора сонаправлены с отрицательным направлением оси).

Проекции векторов могут быть и равны нулю (если они направлены перпендикулярно оси координат).

В общем виде уравнения движения имеют вид:

$$\begin{cases} s = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt \\ v = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt \end{cases} \tag{1.18}$$

1.1.5 Движение материальной точки по окружности

При описании движения материальной точки по окружности удобнее ввести следующие величины.

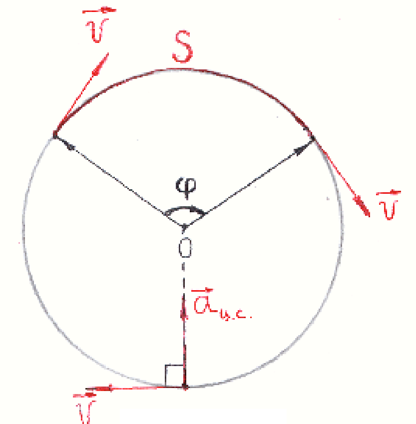


Рис. 1.13

Угол поворота φ (характеризует угол, на который поворачивается радиус-вектор материальной точки при её движении по окружности)

$$\varphi = рад, \text{ радиан.}$$

В окружности $2\pi\,рад \approx 360^\circ$, следовательно, $1рад \approx 57^\circ$.

Для характеристики быстроты изменения угла поворота вводят понятие угловой скорости ω.

Различают:

- ***Среднюю угловую скорость*** $\langle\omega\rangle$ – скалярную физическую величину, равную отношению угла поворота тела $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, в течение которого этот поворот произошел:

$$\langle\omega\rangle = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{1.29}$$

Размерность угловой скорости: $\omega = \frac{рад}{c}$, радиан в секунду.

Физический смысл угловой скорости: *она показывает, на какой угол поворачивается радиус-вектор любой точки тела за единицу времени при равномерном вращении.*

(например: $\omega = 2\frac{рад}{c}$ означает, что за каждую секунду радиус-вектор поворачивается на 2 радиана).

- ***Мгновенную угловую скорость*** $\vec{\omega}$ – векторную физическую величину, равную пределу отношения изменения угла поворота тела $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, в течении которого этот поворот произошёл:

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \varphi' . \quad (1.30)$$

Для характеристики быстроты изменения угловой скорости тела вводится понятие **углового ускорения** ε.

Различают:

- ***Среднее угловое ускорение*** $\langle\varepsilon\rangle$ – скалярную физическую величину, равную отношению изменения угловой скорости тела $\Delta\omega$ к промежутку времени Δt, в течение которого это изменение произошло:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} . \quad (1.31)$$

Размерность углового ускорения: $\varepsilon = \frac{рад}{c^2}$, радиан на секунду в квадрате.

Физический смысл углового ускорения: *оно показывает, на сколько радиан в секунду изменяется угловая скорость тела за единицу времени при равномерном вращении.*

(например: $\varepsilon = 5\frac{рад}{c^2}$ означает, что за каждую секунду угловая скорость тела изменяется на 5 радиан в секунду).

- ***Мгновенное угловое ускорение*** $\vec{\varepsilon}$ – векторную физическую величину, равную пределу отношения изменения угловой скорости тела $\Delta\omega$ к промежутку времени Δt, в течении которого этот поворот произошёл:

$$\vec{\varepsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \omega' . \quad (1.32)$$

Элементарное угловое перемещение $d\varphi$ можно рассматривать как вектор $d\vec{\varphi}$, направление которого определяется по ***правилу буравчика***:

если рукоятку буравчика вращать по направлению вращения тела, то поступательное движение буравчика будет совпадать с направлением вектора $d\vec{\varphi}$ (см. рис.1.14).

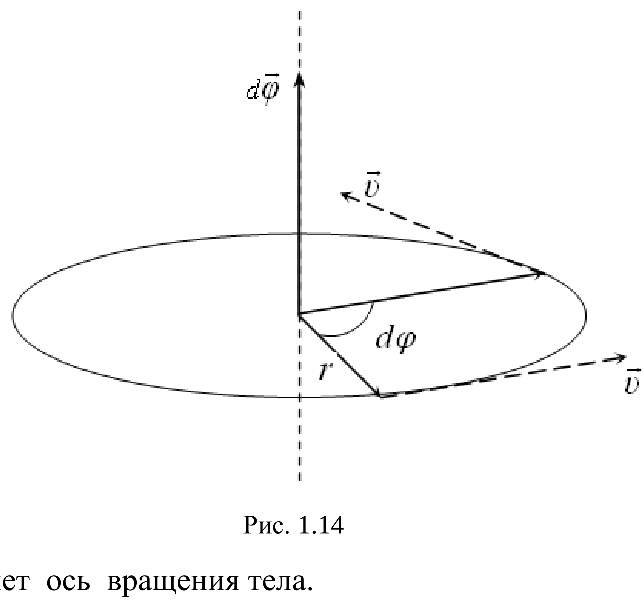


Рис. 1.14

Удобство такого введения в следующем:

- модуль вектора $d\vec{\varphi}$ однозначно определяет величину элементарного поворота тела $d\varphi$,
- направление вектора $d\vec{\varphi}$ через правило буравчика определяет направление вращения тела,

-положение вектора $d\vec{\varphi}$ в пространстве определяет ось вращения тела.

Направление угловой скорости $\vec{\omega}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\varphi}$, то есть она также определяется по правилу буравчика.

Направление вектора углового ускорения $\vec{\varepsilon}$ совпадает с направлением вектора $d\vec{\omega}$, то есть оно сонаправлено с вектором $\vec{\omega}$ при ускоренном вращении тела и противоположно направлено при замедленном вращении.

Периодическим движением называется движение, повторяющееся через одинаковые промежутки времени.

Периодом называется минимальный интервал времени, через который движение или процессы повторяются в той же самой последовательности.

Периодом вращения называется время одного полного оборота вокруг оси вращения:

$$T = \frac{t}{N}\ , \tag{1.33}$$

где t – время, за которое точка сделает N оборотов, $T = c$.

Частотой вращения *n* называется число оборотов за единицу времени:

$$n = \frac{N}{t}\ , \tag{1.34}$$

где N – число оборотов за время t, $n = \left[\frac{об}{c}\right] \equiv \left[\frac{1}{c}\right]$.

Причём
$$T = \frac{1}{n}. \tag{1.35}$$

Движение материальной точки по окружности с постоянной по величине скоростью– это движение с центростремительным ускорением $a_{ц\ с.}$, которое всегда направлено к центру окружности, по которой движется точка.

1.1.6 «Естественный» способ описания движения

Этот способ применяют тогда, когда траектория точки заранее известна. Положение точки в этом случае задают дуговой координатой ξ (кси).

Уравнением движения является зависимость координаты ξ от времени, т.е.:

$$\xi = f(t) \tag{1.19}$$

Скорость точки. Введем единичный вектор $\vec{\tau}$, связанный с движущейся точкой $\boldsymbol{A}$ и направленный по касательной к траектории в сторону движения точки (рис. 1.13). Вектор $\vec{\tau}$ при движении точки изменяет свое направление, и, следовательно, не является постоянным вектором. Вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ связан с ортом $\vec{\tau}$ соотношением:

$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau}\ . \tag{1.20}$$

Величина вектора скорости $v = |\vec{v}|$ есть производная от дуговой координаты по времени, то есть:

$$v = \frac{d\xi}{dt}\ . \tag{1.21}$$

Ускорение точки

Вектор полного ускорения точки определяется по формуле:

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{n}, \qquad (1.22)$$

где $\frac{dv}{dt}$ - производная от величины вектора скорости по времени, $\vec{n}$ - единичный вектор нормали, а $\boldsymbol{\rho}$ – радиус кривизны траектории в точке $\boldsymbol{A}$. Первое слагаемое в правой части (1.22) это составляющая вектора полного ускорения, направленная по вектору $\vec{\boldsymbol{\tau}}$, и называемая ***тангенциальным ускорением***, т.е.:

$$\vec{a}_\tau = a_\tau \cdot \vec{\tau} = \frac{dv}{dt} \cdot \vec{\tau}, \qquad (1.23)$$

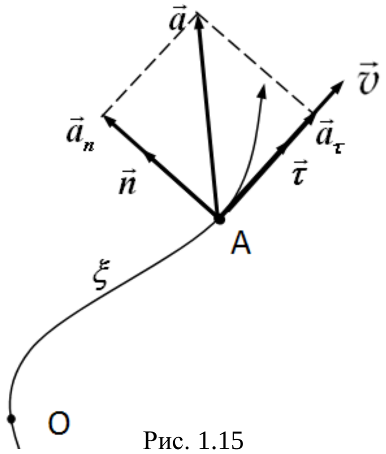


Рис. 1.15

где $a_\tau = \frac{dv}{dt}$ - величина тангенциального ускорения.

Второе слагаемое в правой части равенства (1.22) представляет собой составляющую вектора полного ускорения, направленную по вектору нормали $\vec{n}$, и называется ***нормальным ускорением***.

Величина нормального ускорения находится по формуле:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}. \qquad (1.24)$$

Из рис.1.15 видно, что вектор ***полного ускорения*** и его модуль можно найти по формуле:

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \qquad (1.25)$$

Движение с постоянным по величине тангенциальным ускорением описывается уравнением:

$$\xi(t) = \xi_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \qquad (1.26)$$

где ξ_0 – величина дуговой координаты в начальный момент времени, v - модуль вектора скорости, a_τ - величина тангенциального ускорения.

§1.2 Кинематика абсолютно твёрдого тела

Абсолютно твёрдым телом называется тело, деформациями которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

Любое сложное движение твёрдого тела можно представить как сумму двух наиболее простых: поступательного и вращательного движений.

1.2.1. Поступательное движение тела

Поступательным называется движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, остаётся параллельной сама себе при движении тела.

Основными особенностями такого вида движения являются следующие обстоятельства:

при поступательном движении все точки тела движутся совершенно одинаково, то есть имеют одну и ту же линейную скорость $\vec{v}$, ускорение $\vec{a}$, траектории движения, совершают одинаковые перемещения и проходят одинаковый путь.

В этом случае при описании движения тела его можно рассматривать как материальную точку.

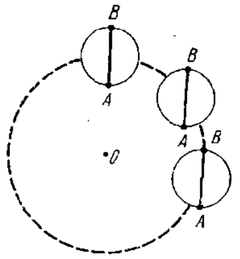


Рис. 1.16

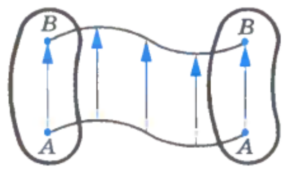


Рис. 1.17

1.2.2. Вращательное движение тела

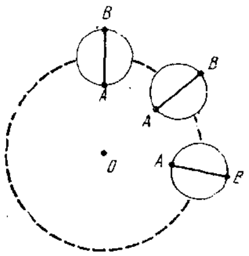


Рис. 1.18

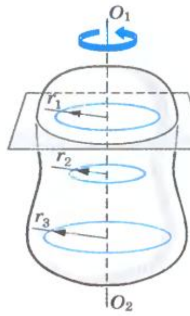


Рис. 1.19

Вращательным называется движение, при котором все точки тела описывают окружности, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой ***осью вращения тела***.

Основной особенностью такого вида движения является следующее обстоятельство: *при вращательном движении все точки тела движутся с одной и той же угловой скоростью* $\vec{\omega}$ *и угловым ускорением* $\vec{\varepsilon}$ *и совершают одинаковые угловые перемещения* φ .

1.2.3. Вращение тела вокруг неподвижной оси

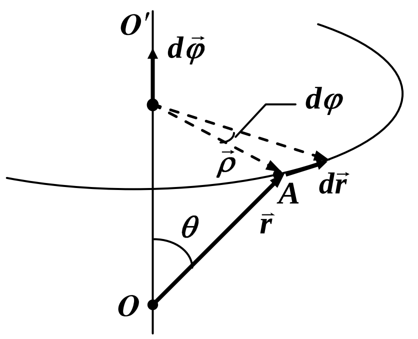


Рис. 1.20

Пусть за бесконечно малый промежуток времени dt твердое тело повернулось вокруг оси $\boldsymbol{OO'}$ на угол $d\varphi$ (см. рис. 1.20). Вектор радиуса вращения обозначим $\vec{\rho}$, радиус–вектор точки $\boldsymbol{A}$ — $\vec{r}$, а перемещение некоторой точки $\boldsymbol{A}$ твердого тела – $d\vec{r}$.

Вектором угла поворота $d\vec{\varphi}$ называется вектор, направленный по оси вращения, а его величина равна углу поворота $d\varphi$, измеренного в радианах. Направление вектора $d\vec{\varphi}$ определяют ***по правилу буравчика***: *если рукоятку буравчика вращать по направлению вращения тела, то поступательное движение буравчика укажет направление вектора угла поворота* $d\vec{\varphi}$.

Из рис.1.20 видно, что величина бесконечно малого перемещения $\left|d\vec{r}\right|$ и угол поворота $d\varphi$ связаны соотношением

$$\left|d\vec{r}\right| = r \cdot \sin\theta \cdot d\varphi = \rho \cdot d\varphi \ . \tag{1.27}$$

Справедливо также и векторное равенство:

$$d\vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{r} = d\vec{\varphi} \times \vec{\rho} \, . \tag{1.28}$$

1.2.4. Связь между линейными и угловыми величинами

Модуль вектора перемещения $\Delta\vec{r}$ и изменение угла поворота $\Delta\varphi$ связаны соотношением:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \left|\vec{r}\right| \cdot \sin\theta \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2} = \left|\vec{\rho}\right| \cdot \sin\frac{\Delta\varphi}{2}, \tag{1.36}$$

где $\vec{r}$ - радиус–вектор точки $\boldsymbol{A}$, $\vec{\rho}$ - ее радиус вращения (см. рис. 1.20).

Вектор линейной скорости $\vec{v}$ и вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ связаны векторным равенством:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \, . \tag{1.37}$$

В скалярном виде справедливо равенство:

$$\left|\vec{v}\right| = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{\mathrm{r}}\right| \cdot \sin\theta = \left|\vec{\omega}\right| \cdot \left|\vec{\rho}\right| . \tag{1.38}$$

Для вектора полного ускорения $\vec{a}$ справедливы соотношения (1.23)–(1.25), и, кроме того, имеем следующее векторное равенство:

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \ \vec{\omega} \times \vec{r} \ \ , \tag{1.39}$$

где $\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ - вектор тангенциального ускорения, $\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \ \vec{\omega} \times \vec{r}$ вектор нормального ускорения.

Проекции вектора $\vec{a}$ на орты $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ равны:

$$a_\tau = \varepsilon_z \cdot \rho\,, \quad a_{\text{n}} = \omega^2 \cdot \rho\,. \qquad (1.40)$$

Модуль полного ускорения равен:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \rho \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (1.41)$$

Связь линейных и угловых величин

$$\begin{cases} l = \varphi r \\ v = \omega r \\ a_{цс} = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r = \omega v \end{cases} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\, n \qquad (1.42)$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau \qquad a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} \qquad T = \frac{1}{n} \qquad (1.43)$$

Изменение угла поворота тела от времени t определяет закон вращательного движения тела.

$$\vec{\varphi}(t) = \overrightarrow{f(t)}$$

При решении задач на вращательное движение используется проекция этого равенства на ось вращения, при этом ось вращения OZ обычно направляют по вектору угла поворота.

Уравнения равнопеременного вращательного движения вокруг неподвижной оси имеют в этом случае следующий вид:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \omega_{oz}\, t + \dfrac{\varepsilon_z t^2}{2} \\ \omega = \omega_{oz} + \varepsilon_z t \end{cases}. \qquad (1.44)$$

В общем случае уравнения вращательного движения вокруг неподвижной оси имеют вид:

$$\begin{cases} \varphi = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \omega(t)\, dt \\ \omega = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \varepsilon(t)\, dt \end{cases}. \qquad (1.45)$$

1.2.5. Плоское движение твёрдого тела

Плоское движение *– это движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях неподвижных в некоторой системе отсчета*.

Примером плоского движения служит качение цилиндра по плоскости. Такое движение твердого тела можно представить как результат сложения двух движений, поступательного и вращательного. Выберем две системы отсчета $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}$ (см. рис. 1.21). Пусть система $\boldsymbol{K'}$, связанная жестко с точкой $\boldsymbol{O'}$ твердого тела, движется поступательно относительно системы $\boldsymbol{K}$ (см. рис 1.21). При плоском движении тела его положение в процессе движения определяется положением такого сечения тела $\boldsymbol{\Phi}$, которое лежит в плоскости траектории $\boldsymbol{P}$ некоторой точки $\boldsymbol{A}$.

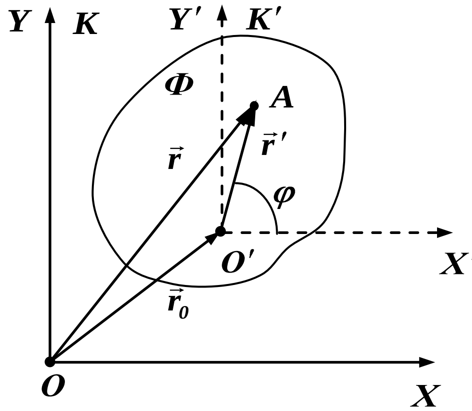


Рис. 1.21

Положение сечения $\boldsymbol{\Phi}$ в системе отсчета $\boldsymbol{K}$ определяется радиус–вектором $\vec{r}_0$ произвольной ее точки $\boldsymbol{O'}$ и углом $\boldsymbol{\varphi}$ между осью $\boldsymbol{O'X'}$ и вектором $\vec{\boldsymbol{r}}'$ точки $\boldsymbol{A}$. Заметим, что для абсолютно твердого тела модуль вектора $\vec{\boldsymbol{r}}'$ не зависит от времени (вектор $\vec{\boldsymbol{r}}'$ может только вращаться). Поэтому движение рассматриваемого сечения $\boldsymbol{\Phi}$ в системе $\boldsymbol{K}$ описывается уравнениями:

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0\ t\ , \qquad \varphi = \varphi\ t\ . \tag{1.46}$$

Для точки $\boldsymbol{A}$ рассматриваемого сечения векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ в системах отсчета $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$ связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}', \tag{1.47}$$

и для бесконечно малых перемещений имеем равенство:

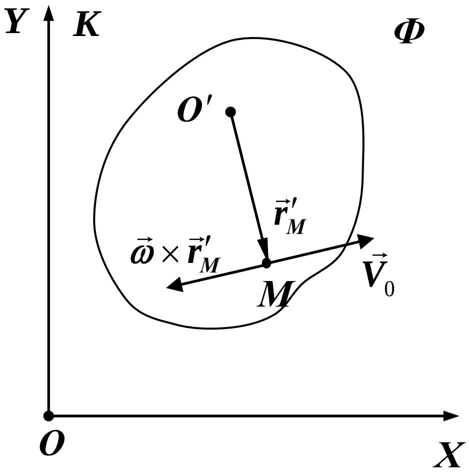


Рис. 1.22

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}', \tag{1.48}$$

где $d\vec{r}-$ перемещение точки $\boldsymbol{A}$ в системе $\boldsymbol{K}$, $d\vec{r}'-$ перемещение точки $\boldsymbol{A}$ в системе $\boldsymbol{K}'$, $d\vec{r}_0-$ перемещение начала отсчета (точка $\boldsymbol{O}'$) системы $\boldsymbol{K}'$ относительно $\boldsymbol{K}$.

Скорость точки $\boldsymbol{A}$ в системе отсчета $\boldsymbol{K}$ и угловая скорость ее в системе $\boldsymbol{K}'$ связаны соотношением:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \tag{1.49}$$

Из (1.40) видно, что скорость любой точки рассматриваемого сечения складывается из скорости поступательного движения $\vec{V}_0$ произвольной точки $\boldsymbol{O}'$ этого сечения и линейной скорости $\vec{V}' = \vec{\omega} \times \vec{r}'$, обусловленной вращением вектора $\vec{r}'$ вокруг точки $\boldsymbol{O}'$.

Очевидно, что векторы $\vec{V}$ и $\vec{V}'$ лежат в плоскости сечения $\boldsymbol{\Phi}$. Следовательно, можно найти такую точку $\boldsymbol{M}$ (не обязательно принадлежащую данному телу), линейная скорость которой в системе $\boldsymbol{K}$ равна нулю. Это достигается тогда, когда $\vec{V}_0 = -\vec{\omega} \times \vec{r}_M{}'$ (см. рис. 1.22). Ось, перпендикулярная сечению $\boldsymbol{\Phi}$ и проходящая через точку $\boldsymbol{M}$, называют мгновенной осью вращения. В этом случае плоское движение тела сводится к чисто вращательному движению вокруг мгновенной оси.

§ 1.3 Скорость и ускорение в различных системах отсчета

Обычно на практике механическое движение какого-либо тела могут одновременно изучать несколько наблюдателей, находящихся в различных системах отсчета. В связи с этим возникает необходимость в сравнении результатов, полученных в различных системах отсчета. И, кроме того, от выбора системы отсчета зависит объем вычислений при решении практических задач. Заметим, что ниже приведенные соотношения справедливы для скоростей движения значительно меньших скорости света в вакууме ($c = 3 \cdot 10^8$ $м/с$).

Постановка задачи. Имеются две произвольные системы отсчета $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}'$, движущиеся относительно друг друга. Известны скорость $\vec{V}$ и ускорение $\vec{a}$ точки $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{K}-$ системе. Каковы значения величин $\vec{V}'$ и $\vec{a}'$ в $\boldsymbol{K}'-$ системе.

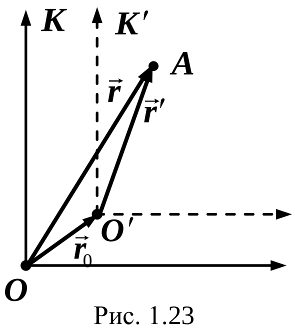


Рис. 1.23

Рассмотрим три наиболее важных случая движения одной системы отсчета относительно другой.

1. **$\boldsymbol{K}'-$система движется поступательно по отношению $\boldsymbol{K}-$ системе.** Пусть положение движущейся точки $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{K}-$ системе определяется радиус–вектором $\vec{r}$, а в $\boldsymbol{K}'-$ системе — радиус–вектором $\vec{r}'$ (см. рис. 1.23). $\boldsymbol{K}'-$ система движется поступательно относительно $\boldsymbol{K}-$ системы. Положение начала отсчета $\boldsymbol{K}'-$ системы (точка $\boldsymbol{O}'$) определяет радиус–вектор $\vec{r}_0$.

Очевидно что, векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ связаны соотношением:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}\,'. \tag{1.50}$$

Для бесконечно малых перемещений $d\vec{r}$ и $d\vec{r}\,'$ точки A соответственно в K и $K'-$ системах справедлива формула:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_0 + d\vec{r}\,'. \tag{1.51}$$

Скорости точки A ($\vec{V}$ и $\vec{V}'$) в K и $K'-$ системах связаны соотношением:

$$\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{V}', \tag{1.52}$$

где $\vec{V}_0 -$ скорость $K'-$ системы относительно $K-$ системы.

Для ускорений имеем равенство:

$$\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,', \tag{1.53}$$

где $\vec{a}, \vec{a}\,' -$ ускорение точки A в K и $K'-$ системах соответственно, $\vec{a}_0 -$ ускорение $K'-$ системы относительно $K-$ системы.

Из соотношений (1.50)—(1.53) следует, что в перемещение, скорость и ускорение точки A зависит от выбора системы отсчета, т.е. не являются инвариантными величинами для различных систем отсчета.

В том случае, когда $K'-$ система движется поступательно с постоянной скоростью ($\vec{V}_0 = \overrightarrow{const}$), ее ускорение $\vec{a}_0 = \vec{0}$, и, следовательно, имеем равенство:

$$\vec{a} = \vec{a}\,'. \tag{1.54}$$

В этом случае ускорением точки A постоянно в K и $K'-$ системах. Это означает то, что в инерциальных системах отсчета ускорение является инвариантной величиной.

2. $K'-$система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, неподвижной в $K-$системе. Совместим K и $K'-$системы, начало отсчета возьмем на оси вращения. В этом случае в начальный момент времени радиус–вектор точки A можно выбрать одинаковым в K и $K'-$системах ($\vec{r} \equiv \vec{r}\,'$). Пусть $\vec{V}$ и $\vec{V}'$скорости точки A в K и $K'-$системах, тогда перемещение этой точки в $K'-$системе равно $\vec{V}' \cdot dt$, а перемещение $K'-$ системы относительно K— $d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ (рис.1.24).

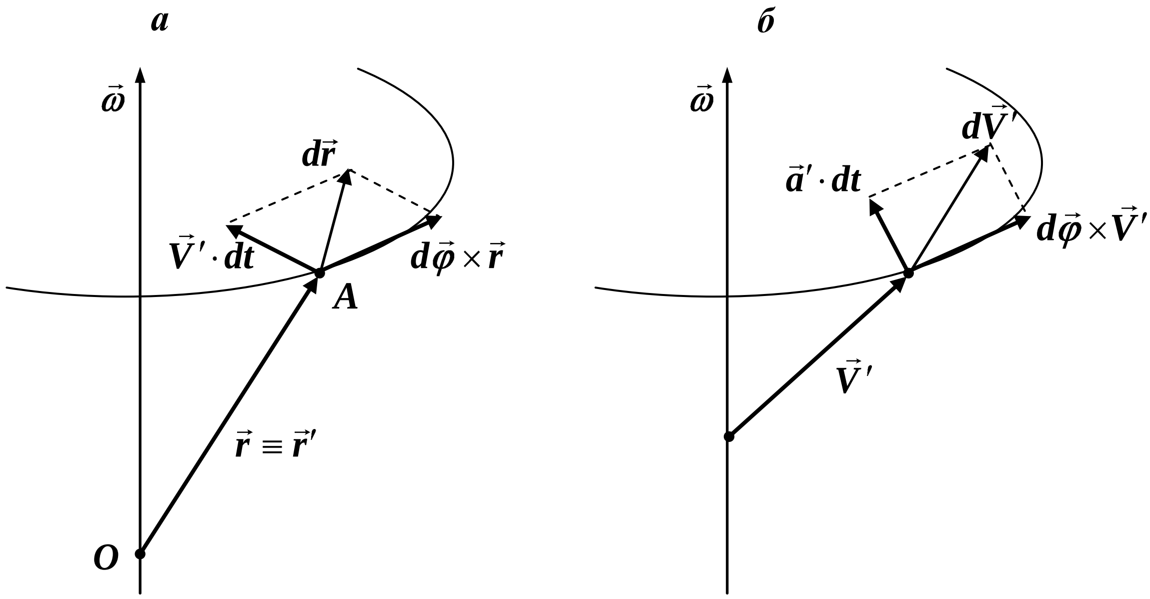


Рис. 1.24

При этом угол поворота $K'-$ системы за время dt равен $d\vec{\varphi}$.

Перемещение точки A в $K-$ системе равно

$$d\vec{r} = \vec{V}' \cdot dt + d\vec{\varphi} \times \vec{r}. \tag{1.55}$$

Соотношение для скоростей $\vec{\boldsymbol{V}}$ и $\vec{\boldsymbol{V}}$ в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}-$ системах имеет вид

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\,. \tag{1.56}$$

Ускорения $\vec{\boldsymbol{a}}$ и $\vec{\boldsymbol{a}}'$ в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}-$ системах связаны соотношением:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}' + 2\cdot\ \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{V}}'\ + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times\ \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\ \ . \tag{1.57}$$

Второе слагаемое в равенстве (1.57) называют ***кориолисовым ускорением***, а третье слагаемое — ***осестремительным ускорением***:

$$\vec{\boldsymbol{a}}_{кор} = 2\cdot\left[\vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{V}}'\right], \qquad \vec{\boldsymbol{a}}_{ос} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times\ \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\ \ . \tag{1.58}$$

Пусть $\vec{\boldsymbol{\rho}}-$ вектор, проведенный в точку $\boldsymbol{A}$ перпендикулярно оси вращения, тогда равенство (1.57) примет вид

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}' + 2\cdot\ \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{V}}'\ - \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \vec{\boldsymbol{\rho}}\,. \tag{1.59}$$

Для определения направления вектора $\vec{\boldsymbol{a}}_{кор}$ используют равенство (1.58) и правило буравчика, осестремительное ускорение направлено против вектора $\vec{\boldsymbol{\rho}}$ к оси вращения $\boldsymbol{K'}-$ системы.

3. $\boldsymbol{K'}-$система вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ вокруг оси, перемещающейся поступательно со скоростью $\vec{\boldsymbol{V}}_0$ относительно $\boldsymbol{K}-$системы.

Пусть $\vec{\boldsymbol{V}}_0$ скорость поступательного движения точки $\boldsymbol{O'}$, являющейся точкой отсчета $\boldsymbol{K'}-$системы, а $\vec{\boldsymbol{\omega}}$ вектор угловой скорости вращения $\boldsymbol{K'}-$системы. Этот случай объединяет два предыдущих.

Для векторов скорости $\vec{\boldsymbol{V}}$ и $\vec{\boldsymbol{V}}'$ точки в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}-$системах справедлива формула:

$$\vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}}_0 + \vec{\boldsymbol{V}}' + \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\,. \tag{1.60}$$

где все обозначения описаны ранее в пункте 2.

Ускорения точки $\boldsymbol{A}$ в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}-$системах ($\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{a}}'$) удовлетворяют следующему соотношению:

$$\vec{\boldsymbol{a}} = \vec{\boldsymbol{a}}_0 + \vec{\boldsymbol{a}}' + 2\cdot\ \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{V}}'\ - \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \vec{\boldsymbol{\rho}}\,. \tag{1.61}$$

Следует заметить, что все обозначения величин, входящих в соотношения (1.60)–(1.61), описаны ранее в пункте 2.

Вопросы для самопроверки

1. Механика и её разделы. Основные понятия: материальная точка, механическая система, перемещение, путь, координаты, радиус-вектор, мгновенная и средняя скорости, ускорение, тангенциальная и нормальная составляющая ускорения, угловая скорость и угловое ускорение.
2. Поступательное и вращательное движение твёрдого тела, их основные особенности.
3. Связь линейных ($\boldsymbol{l}$, v, $\boldsymbol{a}_\tau$, $\boldsymbol{a}_n$) и угловых($\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$) величин. Период и частота вращения.
4. Уравнения поступательного и вращательного движения.
5. Как определить скорость и ускорение в различных системах отсчета?
6. Что такое плоское движение твёрдого тела?

§ 1.4 Примеры решения задач

Пример 1.1 Уравнение движения материальной точки вдоль оси x имеет вид $x = 2 + t - 0.5t^3$. Найти координату x_1, скорость v_1 и ускорение a_1 точки в момент времени $t_1 = 2$ с.

Решение:

Координату x_1 найдем, подставив в уравнение движения материальной точки числовые значения времени t_1: $x_1 = (2 + t_1 - 0.5t_1^3)\ м = (2 + 2 - 0.5 \cdot 2^3)\ м = 0 м$,

То есть, тело через 2с окажется в начале координат.

По определению мгновенная скорость есть первая производная координаты по времени:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = (2 + t - 0.5t^3)' = (1 - 1.5t^2)\ \frac{м}{с}.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с: $\upsilon_1 = (1 - 1.5t_1^2)\ \frac{м}{с} = (1 - 1.5 \cdot 2^2)\ \frac{м}{с} = -5\frac{м}{с}$.

Знак минус, указывает на то, что материальная точка в этот момент движется в противоположную сторону положительного направления оси ох.

По определению мгновенное ускорение точки есть первую производная от скорости по времени:

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = (1 - 1.5t^2)' = -3t\,\frac{м}{с^2}.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с: $a_1 = (-3t_1) = (-3 \cdot 2)\ \frac{м}{с^2} = -6\frac{м}{с^2}$.

Знак минус, указывает на то, что ускорение материальной точки в этот момент направлено в противоположную сторону положительного направления оси ох.

Ответ: $x_1 = 0 м$, $\upsilon_1 = -5\frac{м}{с}$, $a_1 = -6\frac{м}{с^2}$.

Пример 1.2 Движения точки по окружности радиуса $\boldsymbol{\rho} = 8\,\boldsymbol{м}$ задано уравнением $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{t}^2$, где $\boldsymbol{\xi}-$ дуговая координата, $\boldsymbol{A} = 20\,\boldsymbol{м}$, $\boldsymbol{B} = 4\,м/с$, $\boldsymbol{C} = -3\,м/с^2$. Найти скорость, тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки в момент времени $\boldsymbol{t} = 3\,\boldsymbol{с}$.

Решение:

В данной задаче движение точки описывается «естественным» способом. Зная зависимость дуговой координаты $\boldsymbol{\xi}$, найдем выражение для скорости как производную от этой координаты по времени:

$$\boldsymbol{V}_\tau = \frac{d\boldsymbol{\xi}}{d\boldsymbol{t}} = \frac{d}{d\boldsymbol{t}}\left(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{t} + \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{t}^2\right) = \boldsymbol{B} + 2\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{t} \qquad (1)$$

При $\boldsymbol{t} = 3\,\boldsymbol{с}$ имеем $\boldsymbol{V}_\tau = 4 + 2\cdot 3\cdot(-3) = -14\frac{\boldsymbol{м}}{\boldsymbol{с}}$.

В данном способе описания движения скорость является алгебраической величиной. Отрицательный ее знак указывает на то, что вектор скорости в данный момент направлен против орта $\vec{\boldsymbol{\tau}}$. Вектор $\vec{\boldsymbol{\tau}}$ направлен по касательной к траектории в сторону возрастания дуговой координаты $\boldsymbol{\xi}$.

Тангенциальное ускорение найдем, взяв производную от скорости по времени:

$$\boldsymbol{a}_\tau = \frac{d\boldsymbol{V}_\tau}{d\boldsymbol{t}} = \frac{d}{d\boldsymbol{t}}\left(\boldsymbol{B} + 2\cdot\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{t}\right) = 2\cdot\boldsymbol{C} = -6\frac{\boldsymbol{м}}{\boldsymbol{с}^2}.$$

Очевидно, что вектор тангенциального ускорения направлен в туже сторону, что и вектор скорости, а именно против орта $\vec{\boldsymbol{\tau}}$.

Нормальное ускорение точки связано со скоростью движения точки и радиусом окружности соотношение $a_n = \dfrac{V_\tau^{\;2}}{\rho}$. Подставим сюда найденное значение скорости и заданное значение радиуса окружности и произведем вычисления:

$$a_n = \frac{-14^{\;\;2}}{8} = 24{,}5\frac{м}{с^2}.$$

Полное ускорение является геометрической суммой векторов $\vec{a}_n$ и $\vec{a}_\tau$: $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Модуль ускорения равен $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_n^{\;2} + a_\tau^{\;2}}$. Подставив в это выражение найденные значения a_n и a_τ, получим величину полного ускорения точки:

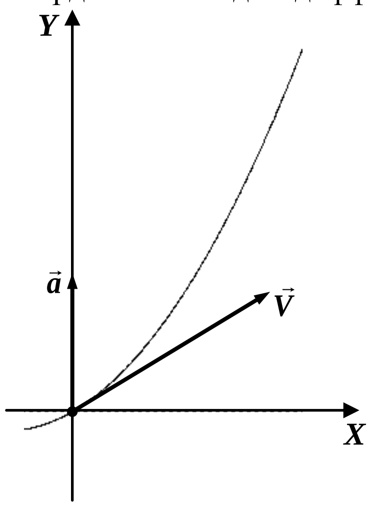
$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{24{,}5^2 + \;\; -6^{\;\;2}} \approx 25{,}2\frac{м}{с^2}.$$

Ответ: $V_\tau = -14\dfrac{м}{с}$, $a_\tau = -6\dfrac{м}{с^2}$, $a_n = 24{,}5\dfrac{м}{с^2}$, $\left|\vec{a}\right| \approx 25{,}2\dfrac{м}{с^2}$.

Пример 1.3 Частица движется в плоскости XOY с постоянным ускорением $\vec{a}$, направление которого совпадает с положительным направлением оси y. Уравнение траектории имеет вид $y = \alpha \cdot x + \beta \cdot x^2$, где α и $\beta -$ положительные коэффициенты. Найти скорость частицы в начале координат.

Решение:

Траекторией частицы является участок параболы, изобразим ее в декартовой системе координат. Покажем на этом рисунке вектор скорости и вектор ускорения частицы в начале координат. Находим дифференциал от обеих частей уравнения движения частицы



$$dy = \alpha \cdot dx + \beta \cdot 2 \cdot x \cdot dx, \qquad (1)$$

где $dx, dy -$ соответственно дифференциалы координат x и y.

Выразим dx, dy через проекции вектора скорости на оси координат:

$$dx = V_x \cdot dt, \quad dy = V_y \cdot dt, \qquad (2)$$

где $dt -$ дифференциал времени.

С учетом соотношений (2) равенство (1) примет вид

$$V_y \cdot dt = \alpha \cdot V_x \cdot dt + \beta \cdot 2 \cdot x \cdot V_x \cdot dt. \qquad (3)$$

Разделим обе части соотношения (3) на dt, получим следующую формулу:

$$V_y = \alpha \cdot V_x + 2 \cdot \beta \cdot x \cdot V_x. \qquad (4)$$

В начале координат, т.е. при $x = 0$, формула (4) имеет вид

$$V_{0y} = \alpha \cdot V_{0x} + 2 \cdot \beta \cdot 0 \cdot V_{0x} = \alpha \cdot V_{0x}. \qquad (5)$$

Дифференцируем обе части равенства (4) по времени

$$\frac{dV_y}{dt} = \frac{d}{dt}\;\; \alpha \cdot V_x + 2 \cdot \beta \cdot x \cdot V_x \;\; = \alpha \cdot \frac{dV_x}{dt} + 2 \cdot \beta \cdot V_x + 2 \cdot \beta \cdot x \cdot \frac{dV_x}{dt}. \qquad (6)$$

С учетом того, что $\dfrac{dV_x}{dt} = a_x$ и $\dfrac{dV_y}{dt} = a_y$, где $a_x, a_y -$ проекции вектора ускорения на оси координат, равенство (6) примет вид:

$$a_y = \alpha \cdot a_x + 2 \cdot \beta \cdot V_x + 2 \cdot \beta \cdot x \cdot a_x. \qquad (8)$$

По условию задачи вектор ускорения частицы направлен по оси $\boldsymbol{OY}$, поэтому $\boldsymbol{a}_x = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot \cos 90^0 = 0, \quad \boldsymbol{a}_y = |\vec{\boldsymbol{a}}| \cdot \cos 0^0 = |\vec{\boldsymbol{a}}|$. С учетом этого, а также при $\boldsymbol{x} = 0$, последнее равенство упрощается

$$|\vec{\boldsymbol{a}}| = 2 \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{V}_{0x}. \tag{9}$$

Из последнего соотношения находим проекцию $\boldsymbol{V}_{0x}$ вектора скорости на ось $\boldsymbol{x}$ в начале координат

$$\boldsymbol{V}_{0x} = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}|}{2 \cdot \boldsymbol{\beta}}. \tag{10}$$

Учитывая последнее соотношение, из равенства (5) находим проекцию вектора скорости на ось $\boldsymbol{y}$ в начале координат:

$$\boldsymbol{V}_{0y} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{V}_{0x} = \boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}|}{2 \cdot \boldsymbol{\beta}}. \tag{11}$$

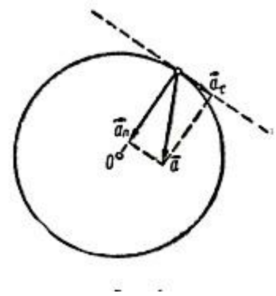
Длина вектора находится через его проекции на оси координат по формуле $|\vec{\boldsymbol{V}}_0| = \sqrt{\boldsymbol{V}_{0x}{}^2 + \boldsymbol{V}_{0x}{}^2}$. Зная проекции вектора скорости на оси (см. (10), (11)), находим величину вектора скорости в начале координат:

$$|\vec{\boldsymbol{V}}_0| = \sqrt{\boldsymbol{V}_{0x}{}^2 + \boldsymbol{V}_{0x}{}^2} = \sqrt{\left(\frac{|\vec{\boldsymbol{a}}|}{2 \cdot \boldsymbol{\beta}}\right)^2 + \left(\boldsymbol{\alpha} \cdot \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}|}{2 \cdot \boldsymbol{\beta}}\right)^2} = \frac{|\vec{\boldsymbol{a}}|}{2 \cdot \boldsymbol{\beta}} \cdot \sqrt{1 + \boldsymbol{\alpha}^2}.$$

Ответ: $|\vec{\boldsymbol{V}}_0| = \dfrac{|\vec{\boldsymbol{a}}|}{2 \cdot \boldsymbol{\beta}} \cdot \sqrt{1 + \boldsymbol{\alpha}^2}$.

Пример 1.4 Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$ где А = 10 рад, В = 20 рад/с, С = -2 рад/с^2. Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии r = 0,1 м от оси вращения, для момента времени t = 4 с.

***Решение*:**



Полное ускорение $\vec{a}$ точки, движущейся по кривой линии, может быть найдено как геометрическая сумма тангенциального ускорения $\vec{a}_\tau$, направленного по касательной к траектории, и нормального ускорения $\vec{a}_n$, направленного к центру кривизны траектории (рис. 1):

Так как векторы $\vec{a}_\tau$ и $\vec{a}_n$ взаимно перпендикулярны, то абсолютная величина ускорения

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} \tag{1}$$

Тангенциальное и нормальное ускорения точки вращающегося тела выражаются следующими формулами:

$$\vec{a}_\tau = \varepsilon r, \quad \vec{a}_n = \omega^2 r,$$

где ω — угловая скорость тела; $\vec{a}_n$ — его угловое ускорение. Подставляя выражения для a_τ и $\vec{a}_n$ в формулу (1), находим

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \tag{2}$$

Угловую скорость ω найдем, взяв первую производную от угла поворота по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = B + 2Ct.$$

В момент времени t = 4с угловая скорость ω = [20 + 2 (—2) 4] рад/с = 4 рад/с.

Угловое ускорение найдем, взяв первую производную от угловой скорости по времени:

$$\varepsilon=\frac{d\omega}{dt}=2C=-4\text{рад/с}^2$$

Это выражение не содержит времени; следовательно, угловое ускорение заданного движения постоянно.

Подставляя найденные значения ω и ε и заданное значение r в формулу (2), получим

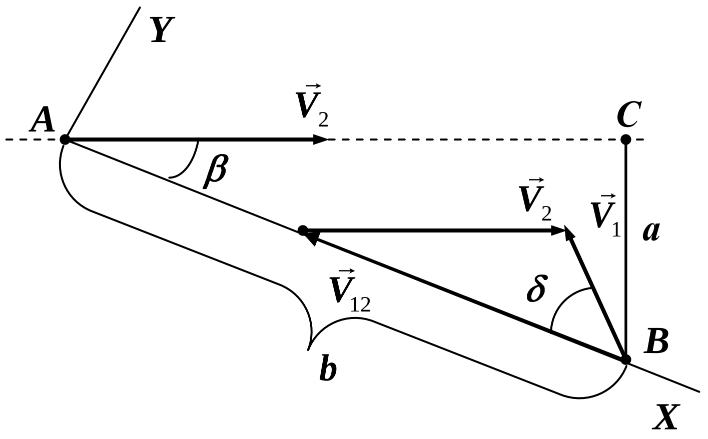
$$a=0{,}1\sqrt{(-4)^2+4^4}\,\text{м/с}^2=1{,}65\text{ м/с}^2$$

Ответ: $a=1{,}65\,\dfrac{м}{c^2}$.

Пример 1.5 По шоссе со скоростью $\boldsymbol{V_2=16}$ ***м/с*** движется автобус. Человек находится на расстоянии $\boldsymbol{a=50}$ ***м*** от шоссе и $\boldsymbol{b=400}$ ***м*** от автобуса. В каком направлении должен бежать человек, чтобы оказаться в некоторой точке шоссе одновременно с автобусом, если он может бежать со скоростью $\boldsymbol{V_1=4}$ ***м/с***?

Решение:

Автобус и человек совершают поступательные движения, поэтому рассмотрим движения некоторой точки автобуса и человека. Изобразим рисунок для данной задачи. В качестве $\boldsymbol{K}-$ системы выберем систему, связанную с поверхностью Земли, а $\boldsymbol{K'}-$ систему закрепим с выбранной точкой автобуса. В данной системе отсчета автобус является неподвижным телом, а человек движется со скоростью $\vec{\boldsymbol{V}}_{12}$. Причем, если человек хочет встретиться с автобусом, то его траектория в этой системе отсчета должна быть направлена на автобус, т.е. от точки В к точке А. Поскольку скорость в прямолинейном движении направлена по траектории, то вектор выбранной скорости человека относительно автобуса $\vec{V}_{12}$ должен быть направлен от точки В к А.



Изобразим вектор $\vec{V}_{12}$ на рисунке. Согласно формулы (1.43) скорость человека $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_{12}$ в $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K'}-$ системах связаны соотношением:

$$\vec{V}_1=\vec{V}_{12}+\vec{V}_2 \tag{1}$$

Из соотношения (1) следует, что вектор скорости человека относительно земли $\vec{V}_1$ должен быть направлен так, чтобы сумма векторов скоростей человека относительно автобуса $\vec{V}_{12}$ и автобуса относительно Земли $\vec{V}_2$, равнялась бы вектору $\vec{V}_1$.

Сложим векторы $\vec{V}_{12}$ и $\vec{V}_2$ по правилу треугольника, получим вектор $\vec{V}_1$. Обозначим угол между вектором $\vec{V}_1$ и отрезком АВ через $\boldsymbol{\delta}$. Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Используя основное свойство векторных равенств, запишем равенство для проекций векторов $\vec{V}_1$, $\vec{V}_{12}$ и $\vec{V}_2$ на ось OY, получим следующее равенство:

$$V_{1y}=V_{12y}+V_{2y}\Rightarrow V_1\cdot\sin\ \delta=0+V_2\cdot\sin\ \beta\Rightarrow\sin\ \delta=\frac{V_2}{V_1}\cdot\sin\beta. \tag{2}$$

Из треугольника АВС находим $\sin\beta$: $\quad\sin\beta=\dfrac{a}{b}$. (3)

Заменив $\sin\beta$ в формуле (2) выражением, приведенным в соотношении (3), получим формулу для вычисления угла между направлением вектора скорости человека относительно земли и отрезком АВ:

$$\sin\delta = \frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{a}{b} \Rightarrow \delta = \arcsin\left(\frac{V_2}{V_1}\cdot\frac{a}{b}\right). \qquad (4)$$

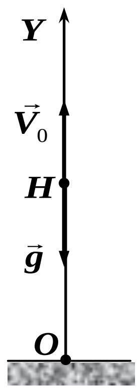
Подставим численные значения величин, входящих в формулу (4), получим величину угла $\boldsymbol{\delta}$:

$$\delta = \arcsin\left(\frac{16}{4}\cdot\frac{50}{400}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \quad рад = 30^0 .$$

Ответ: Человек должен бежать под углом 30^0 к отрезку, соединяющего его начальное положение и начальное положение автобуса.

Пример 1.6 Два тела брошены вертикально вверх из одной и той же точки с одинаковой скоростью $\mathbf{V_0 = 19{,}6\ м/с}$ с промежутком времени $\mathbf{\Delta t = 0{,}5\ с}$. Через какое время после начала движения второго тела и на какой высоте встретятся тела?

Решение:



Выберем систему координат так, чтобы ось OY была направлена вертикально вверх, начало координат совместим с поверхностью Земли. Координату точки бросания обозначим $\mathbf{H}$. Изобразим в системе координат векторы начальной скорости и ускорения свободного падения. Возьмем два секундомера, первый секундомер включим в момент броска первого тела, второй секундомер — в момент броска второго тела. Показания первого секундомера обозначим через $\mathbf{t_1}$, а второго — через $\mathbf{t_2}$. Запишем уравнения движения тел в выбранных системах отсчета времени:

$$y_1(t_1) = H + V_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2}\ ; \quad y_2(t_2) = H + V_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}$$

Приведем данные уравнения движения в единую систему отсчета времени. Требуется найти момент встречи по второму секундомеру. Поэтому в уравнение движения первого тела вместо $\mathbf{t_1}$ подставим $\mathbf{t_1 = t_2 + \Delta t}$, получим следующие уравнения:

$$y_1(t_2) = H + V_0(t_2 + \Delta t) - \frac{g(t_2 + \Delta t)^2}{2}\ ; \quad y_2(t_2) = H + V_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2}$$

В момент встречи координаты тел совпадают, и, следовательно, приравняв правые части уравнений движения тел, получим уравнение для определения момента встречи:

$$y_1(t_2) = y_2(t_2) \Rightarrow H + V_0(t_2 + \Delta t) - \frac{g(t_2 + \Delta t)^2}{2} = H + V_0 t_2 - \frac{g t_2^2}{2} .$$

Решив данное уравнение, находим время встречи:

$$t_2 = \frac{V_0}{g} - \frac{\Delta t}{2} = \frac{19{,}6}{9{,}8} - \frac{0{,}5}{2} = 1{,}75 c .$$

Зная время встречи, из уравнения движения второго тела находим координату встречи:

$$y_2(1{,}75) = H + 19{,}6\cdot 1{,}75 - \frac{9{,}8\cdot 1{,}75^2}{2} = H + 19{,}3 .$$

Это значит, что координата точки встречи тел расположена на высоте 19,3 м выше точки бросания тел.

Ответ: $t_2 = 1{,}75 c$, $h = (H + 19{,}3) м$.

Пример 1.7 Радиус–вектор движущейся частицы изменяется со временем по закону: $\vec{r}(t) = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}$, где $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ – единичные векторы декартовой системы координат. Найти: а) вектор скорости $\vec{\boldsymbol{V}}$ и вектор ускорения $\vec{\boldsymbol{a}}$ частицы; б) модуль скорости $\left|\vec{\boldsymbol{V}}\right|$ в момент времени $\boldsymbol{t} = 1\,\boldsymbol{c}$; в) модуль вектора перемещения за время $\boldsymbol{t} = 1\,\boldsymbol{c}$, г) уравнение траектории частицы в декартовой системе координат; д) величину тангенциального ускорения в момент времени $\boldsymbol{t} = 10\,\boldsymbol{c}$ е) приближенное значение длины пути $\boldsymbol{S}$, пройденного частицей за 11–ю секунду движения.

Решение:

а) В данной задаче движение частицы описывается векторным уравнением. Найдем вектор скорости как производную от радиус–вектора движущейся частицы по времени (см. 1.4):

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}) = 6t\vec{i} + 2\vec{j} + 0\vec{k} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}\,. \quad (1)$$

Из данного соотношения видно, что проекция вектора скорости на ось OZ равна нулю $\boldsymbol{V_z} = 0$, следовательно, частица движется в плоскости XOY.

Вектор ускорения находим дифференцированием выражения для вектора скорости по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(6t\vec{i} + 2\vec{j}) = 6\vec{i} + 0\vec{j} = 6\vec{i}\,. \quad (2)$$

Из данного соотношение видно, вектор ускорения имеет ненулевую проекцию только по оси OX, и, кроме того, эта проекция не зависит от времени. Делаем вывод о том, что частица движется с постоянным ускорением, направленным по оси OX.

б) В нашей задаче проекции вектора скорости на оси координат равны (см. 1): $V_x = 6t,\ \ V_y = 2,\ \ V_z = 0$. Для определения модуля вектора скорости в момент времени $t = 1\,c$ используем соотношение (1.12):

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{(6t)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{36t^2 + 4}\,. \quad (3)$$

При $\boldsymbol{t} = 1\,\boldsymbol{c}$ величина скорости равна $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{36\cdot 1^2 + 4} = 2\sqrt{10}\ ^{м}\!/_{c}$.

в) Для вектора перемещения справедлива формула:

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t) - \vec{r}(0)\,, \quad (4)$$

где $\vec{r}(t), \vec{r}(0)$ - соответственно радиус–векторы в момент времени $\boldsymbol{t}$ и в начальный момент времени.

При $\boldsymbol{t} = 0$ вектор перемещения равен

$$\vec{r}(0) = 3\cdot 0^2\vec{i} + 2\cdot 0\vec{j} + 1\vec{k} = 1\vec{k}\,. \quad (5)$$

Находим вектор перемещения $\Delta\vec{\boldsymbol{r}}$:

$$\Delta\vec{r}(t) = (3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}) - (1\vec{k}) = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j}\,. \quad (6)$$

При $\boldsymbol{t} = 1\,\boldsymbol{c}$ вектор перемещения равен

$$\Delta\vec{r}(1) = 3\cdot 1^2\cdot\vec{i} + 2\cdot 1\vec{j} = 3\vec{i} + 2\vec{j}\,. \quad (7)$$

Модуль вектора перемещения находим по формуле:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta r_x{}^2 + \Delta r_y{}^2 + \Delta r_z{}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{13}\ м\,. \quad (8)$$

г) Из уравнения движения $\vec{r}\ \ t\ = 3t^2\vec{i} + 2t\vec{j} + 1\vec{k}$ находим зависимости координат частицы от времени:

$$x(t) = 3t^2, \qquad y(t) = 2t, \qquad z(t) = 1\,. \quad (9)$$

Эти соотношения определяют траекторию, заданную в параметрическом виде. Выразив время из второго равенства, и, подставив в первое равенство, получим уравнение траектории в явном виде:

$$x = 3\left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}y^2, \qquad z = 1. \tag{10}$$

Очевидно, что траекторией частицы является парабола, лежащая в плоскости параллельной плоскости XOY и пересекающей ось OZ в точке с координатой $\boldsymbol{z} = 1$.

д) В начале определим угол между вектором скорости $\vec{\boldsymbol{V}}$ и вектором полного ускорения частицы по формуле (см. приложение):

$$\cos\alpha = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{\left|\vec{V}\right| \cdot \left|\vec{a}\right|} = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{\sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2} \cdot \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2}}. \tag{11}$$

Для тангенциального ускорения имеем равенство:

$$a_\tau = \left|\vec{a}\right| \cos\alpha = \frac{V_x a_x + V_y a_y + V_z a_z}{\sqrt{V_x{}^2 + V_y{}^2 + V_z{}^2}}. \tag{12}$$

С учетом того, что $V_x = 6t, \quad V_y = 2, \quad V_z = 0$ и $a_x = 6, \quad a_y = 0, \quad a_z = 0$, равенство (12) примет вид

$$a_\tau = \frac{6 \cdot t \cdot 6 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{(6t)^2 + 2^2 + 0^2}} = \frac{36t}{\sqrt{36t^2 + 4}}. \tag{13}$$

При $\boldsymbol{t} = 10\,\boldsymbol{c}$ величина тангенциального ускорения равна:

$$a_\tau = \frac{36 \cdot 10}{\sqrt{36 \cdot 10^2 + 4}} \approx 6\,\frac{м}{c^2}. \tag{14}$$

е) Приближенное значение пути, пройденного частицей за 11–ю секунду можно найти как длину отрезка между точками, в которых она находим в моменты времени $\boldsymbol{t}_1 = 10\,\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{t}_2 = 11\,\boldsymbol{c}$. Обозначим через $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1 -$ координаты точки при $\boldsymbol{t}_1 = 10\,\boldsymbol{c}$, а $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z}_2 -$ координаты точки при $\boldsymbol{t}_2 = 11\,\boldsymbol{c}$, тогда для пройденного пути имеем приближенное равенство:

$$L \approx \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{15}$$

Из уравнения движения находим координаты ($\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{z}_1$), ($\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{z}_2$), и, подставив их в соотношение (15), будем иметь:

$$L \approx \sqrt{(3t_2{}^2 - 3t_1{}^2)^2 + (2t_2 - 2t_1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(3 \cdot 11^2 - 3 \cdot 10^2)^2 + (2 \cdot 11 - 2 \cdot 10)^2} \approx 63\ м. \tag{16}$$

Заметим, что точное значение пройденного пути для плоской траектории частицы можно найти из известной математической формулы:

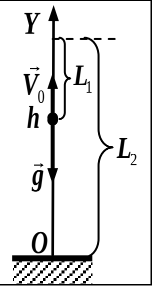
$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx, \tag{17}$$

где $\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_1 -$абсцисса конечной и начальной точки соответственно, $\frac{dy}{dx}$ - производная, вычисляемая из уравнения траектории.

Ответ: а) $\vec{V} = 6t\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{a} = 6\vec{i}$; б) $\left|\vec{V}\right| = 2\sqrt{10}\ {}^{м}\!/_{c}$; в) $\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{13}\ м$;

г) $x = \frac{3}{4}y^2,\ z = 1$; д) $a_\tau \approx 6\,\frac{м}{c^2}$; е) $L \approx 63\ м$.

Пример 1.8 Тело, брошено с балкона вертикально вверх со скоростью $V_0 = 10\ м/с$. Высота балкона над поверхностью земли $h = 12,5\ м$. Написать уравнение движения и определить среднюю путевую скорость $< V >$ движения тела с момента бросания до момента падения на землю.



Решение:

Пренебрегаем размерами тела, т.е. его движение рассматриваем как движение точки. Для решения задачи возьмем ось OY и направим ее перпендикулярно поверхности земли, начало отсчета (точка O) выберем на ее поверхности. Запишем общую зависимость для координат y от времени:

$$y(t) = y_0 + V_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}. \qquad (1)$$

Из рисунка определяем начальные параметры

$$y_0 = h; \quad V_{0y} = V_0 \cos 0^0 = V_0; \quad g_y = g \cos 180^0 = -g. \qquad (2)$$

С учетом начальных условий (2) уравнение движения для данной задачи примет вид

$$y(t) = h + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = 12,5 + 10t - 5t^2. \qquad (3)$$

Определим максимальную координату y при движении тела вверх по оси OY, для этого найдем производную от правой части соотношения (3), и, приравняв полученное соотношение к нулю, получим следующее уравнение:

$$V_0 - gt = 0. \qquad (4)$$

Из уравнения (4), находим момент времени, когда тело достигает максимальной высоты подъема. Затем определяем максимальную координату $y_{\max}$

$$y_{\max} = y\left(\frac{V_0}{g}\right) = h + V_0 \frac{V_0}{g} - \frac{g\left(\frac{V_0}{g}\right)^2}{2} = h + \frac{V_0^2}{2g}. \qquad (5)$$

Найдем время полета тела t_1, для этого используем тот факт, что в момент приземления координата y точки равна нулю:

$$y(t_1) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = h + V_0 t_1 - \frac{g t_1^2}{2}. \qquad (6)$$

Решим полученное квадратное уравнение (6), получим следующие корни:

$$t_1' = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}, \qquad t_1'' = \frac{V_0 - \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}. \qquad (7)$$

Второй корень t_1'' не удовлетворяет условию задачи, потому что его величина отрицательная ($V_0 < \sqrt{V_0^2 + 2gh}$). Имеем время полеты тела:

$$t_1' = \frac{V_0 + \sqrt{V_0^2 + 2gh}}{g}. \qquad (8)$$

Согласно определению величина средней путевой скорости равна:

$$V_{ср.п} = \frac{L}{t_1'} = \frac{L_1 + L_2}{t_1'}, \qquad (9)$$

где L - путь, пройденный телом за все время полета, L_1- путь, пройденный до верхней точки траектории, L_2 - путь, пройденный после верхней точки траектории до падения на землю.

Из рисунка видно, что для величин L_1 и L_2 выполняются следующие равенства:

$$L_1 = y_{\max} - h, \qquad L_2 = y_{\max}. \tag{10}$$

С учетом равенств (8) и (10) равенство (9) примет следующий вид:

$$V_{ср.п} = \frac{\left(h + \dfrac{V_0{}^2}{2g} - h\right) + h + \dfrac{V_0{}^2}{2g}}{\dfrac{V_0 + \sqrt{V_0{}^2 + 2gh}}{g}} = \frac{gh + V_0{}^2}{V_0 + \sqrt{V_0{}^2 + 2gh}}. \tag{11}$$

Найдем величину средней путевой скорости, для чего в равенство (11) подставляем численные значения величин $h,\ V_{0,}\ g$

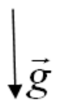
$$V_{ср.п} = \frac{10 \cdot 12,5 + 10^2}{10 + \sqrt{10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 12,5}} \approx 7,84\,\frac{м}{с}.$$

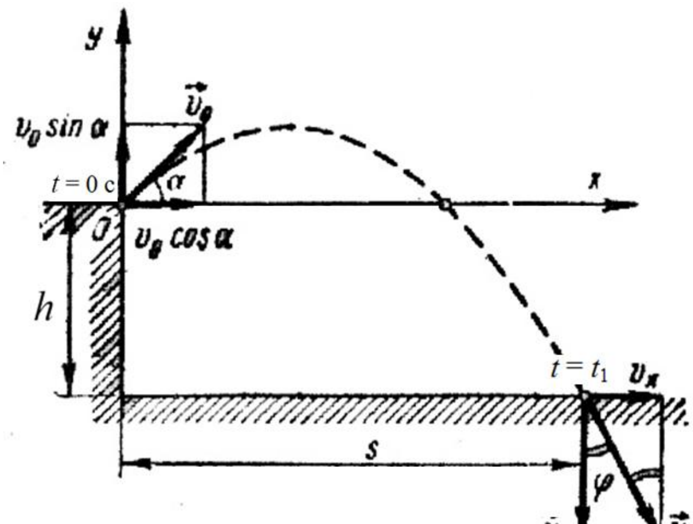
Ответ: $y(t) = 12,5 + 10t - 5t^2$, $V_{ср.п} \approx 7,84\,\dfrac{м}{с}$.

Пример 1.9 Артиллерийское орудие расположено на горе высотой Н. Снаряд вылетает из ствола со скоростью $\vec{\upsilon}_0$, направленной под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: а) дальность полета снаряда по горизонтальному направлению; б) скорость снаряда в момент падения; в) угол падения; г) уравнение траектории и д) начальный угол стрельбы, при котором дальность полета наибольшая.

***Решение*:**

Делаем чертеж к задаче, на котором обозначаем положение тела в начальный момент времени t = 0 с, а затем в характерные моменты времени, о которых есть информация в задаче, а именно, в момент падения снаряда на Землю t_1 (см. рис.).





Прямоугольную систему координат выбираем так, чтобы ее начало совпало с точкой бросания, а оси были направлены вдоль поверхности Земли и по нормали к ней в сторону начального смещения снаряда (замечу, что от выбора системы координат решение задачи не зависит, а вот уравнения движения, в разных системах координат будут выглядеть по-разному. Поэтому необходимо стараться выбрать такую систему координат, в которой уравнения движения будут иметь наиболее простой вид).

Изображаем траекторию снаряда, его начальную скорость υ_0, угол бросания α, высоту h, горизонтальное перемещение S, скорость в момент падения υ (она направлена по касательной к траектории в точке падения) и угол падения φ (углом падения тела называют угол между касательной к траектории, проведенной в точку падения, и нормалью к поверхности Земли). Так как по условию задачи сопротивление воздуха не учитывается, то в этом случае тело после броска будет двигаться только под действием силы тяжести (такое движение тела называется **свободным падением**). В этом случае все тела не зависимо от их формы и размера будут двигаться с одним и тем же ускорением, которое назвали ускорением свободного падения $\vec{g}$, которое всегда направлено вертикально вниз и величина которое вблизи поверхности земли равна $g = 9.81\frac{м}{с^2}$. При вычислениях берите $g = 10\frac{м}{с^2}$).

Запишем уравнения движения для снаряда в общем виде, согласно рисунка в момент времени $t = 0$ с**.**

$$x = \upsilon_0 \cos\alpha t \ . \quad (1)$$

По оси ох:

$$\upsilon_x = \upsilon_0 \cos\alpha \ . \quad (2)$$

По оси оу:

$$y = \upsilon_0 \sin\alpha t - \frac{gt^2}{2} \ . \quad (3)$$

$$\upsilon_y = \upsilon_0 \sin\alpha - gt \quad (4)$$

Обращаю внимание, что из рис. для начального момента времени $t = 0$ с , Вы должны определить начальные координаты тела x_0 и y_0, а также проекции их начальных скоростей υ_{0x} и υ_{0y} и ускорений a_x и a_y в этот момент времени, а не ставить в уравнения движения $t = 0$.

Из рис видно, что в момент времени t_1, когда снаряд упал на землю, его координаты равны:

$$x_1 = s \ ; \ \ y_1 = -h \quad (5)$$

Из рис. по теореме Пифагора можно определить результирующую скорость в момент падения:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 - \upsilon_y^2} \ . \quad (6)$$

В составленной системе уравнений пять неизвестных; нам нужно определить S и υ.

Из уравнений (4) и (5) находим время полета снаряда:

$$t_1 = \frac{\upsilon_0 \sin\alpha + \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}. \quad (7)$$

Подставляя выражение для t_1 в формулы (2) и (3) с учетом (5), соответственно получаем

$$S = \frac{\upsilon_0^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \upsilon_0 \cos\alpha \sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}{g}$$

$$\upsilon_y = -\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2gh} \quad (8)$$

После этого из (6) с учетом (1) и (8) находим:

$$\upsilon = -\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh} \ . \quad (9)$$

Из полученных результатов можно сделать следующие выводы. Если $h = 0$, т. е. снаряды падают на уровне вылета, то согласно формуле (7) дальность их полета будет равна $S = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Если при этом учесть, что угол бросания равен 45^0 ($\sin 2\alpha = 1$), то при заданной начальной скорости υ_0 дальность полета наибольшая: $S_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g}$.

Подставив в выражение (9) значение $h = 0$, получим, что скорость снаряда в момент его подлета к уровню, с которого был произведен выстрел, равна его начальной скорости: $\upsilon = \upsilon_0$.

При отсутствии сопротивления воздуха скорость падения тел равна их начальной скорости бросания независимо от того, под каким углом было брошено тело, лишь бы точки бросания и падения находились на одном уровне. Учитывая, что горизонтальная составляющая скорости с течением времени не изменяется, легко установить, что в момент падения скорость тела образует с горизонтом такой же угол, как и в момент бросания.

Угол падения можно найти, исходя из того, что скорость тела в любой точке траектории направлена по касательной. Из рис. 2 видно, что $tg\varphi = \frac{\upsilon_x}{\upsilon_y}$, откуда с учетом выражений (1) и (8) получим:

$$tg\varphi = \frac{\upsilon_0 \cos\alpha}{\sqrt{\upsilon_0^2 \sin^2\alpha + 2gh}}.$$

Чтобы найти уравнение траектории движения точки — снаряда, нужно найти связь между ее координатами x и y в произвольный момент времени t. Если в уравнениях (2) и (4) под x и y подразумевать смещение снаряда по осям (учитывая, что эти уравнения справедливы для всего движения снаряда), а под t — время, по истечении которого снаряд из точки центра О попал в данную точку траектории, то, исключая из уравнений t. мы и получим искомую связь. Найдя из уравнения (2) время t и подставив его в уравнение (4), получим:

$$y = tg\alpha x - \frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Это уравнение вида $y = -a x^2 + bx$, оно представляет собой уравнение параболы, проходящей через начало координат О и обращенной выпуклостью вверх. Таким образом, тело, брошенное под углом α к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха летит по параболе. Нетрудно заметить, что этот вывод имеет место для любых углов бросания.

Решая уравнения (2), (4) и (5) относительно начального угла бросания α, получим:

$$tg\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{gs}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2gh}{\upsilon_0^2} - \left(\frac{gs}{\upsilon_0^2}\right)^2}\right). \qquad (10)$$

Поскольку угол бросания не может быть мнимым, то это выражение имеет физический смысл лишь при условии, что

$$1 + \frac{2gh}{\upsilon_0^2} - \left(\frac{gs}{\upsilon_0^2}\right)^2 \geq 0,$$

т.е. $s \leq \frac{\upsilon_0\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}{g}$ откуда следует, что максимальное перемещение снаряда по горизонтальному направлению равно:

$$S_{\max} = \frac{\upsilon_0\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}{g},$$

Подставляя выражение $S = S_{\max}$ в формулу (10), получим для угла α, при котором дальность полета наибольшая:

$$tg\alpha = \frac{\upsilon_0^2}{gs_{\max}} = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}.$$

Ответ: $tg\alpha = \frac{\upsilon_0}{\sqrt{\upsilon_0^2 + 2gh}}$

Пример 1.10 Камень брошен на склоне горы под углом α к ее поверхности (рис. 3). Определите дальность полета камня и его наибольшую высоту подъема над склоном, если начальная скорость камня равна $\vec{\upsilon}_0$, угол наклона горы к горизонту β. Сопротивление воздуха не учитывать.

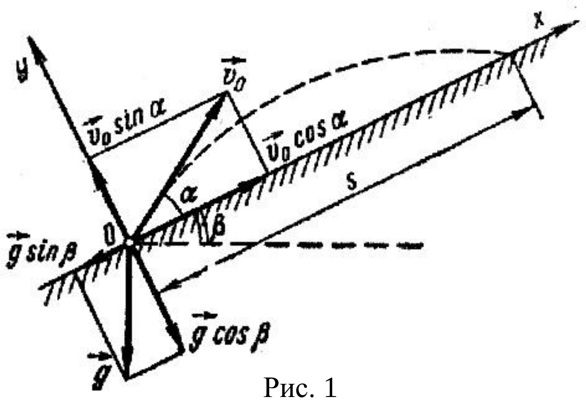


Рис. 1

***Решение*:**

Сложное движение камня по параболе нужно представить как результат наложения двух прямолинейных движений: одного вдоль поверхности Земли, другого — по нормали ней.

Выберем прямоугольную систему координат с началом отсчета , точке бросания камня так, чтобы оси *ОХ* и *ОУ* совпали с указанными направлениями, и найдем составляющие векторов начальной скорости $\vec{\upsilon}_0$ и ускорения свободного падения $\vec{g}$ по осям. Проекции этих составляющих на оси *ОХ* и *ОУ* равны соответственно:

$$\upsilon_0 \cos\alpha; \upsilon_0 \sin\alpha; -g\sin\beta; -g\cos\beta.$$

После этого сложное движение можно рассматривать как два более простых: равнозамедленное движение вдоль поверхности Земли с ускорением $g\sin\beta$ и равнопеременное движение, перпендикулярное склону горы, с ускорением $g\cos\beta$.

Составляем уравнения движения для каждого направления с учетом того, что за время t_1 всего движения перемещение камня по нормали к поверхности (по оси OY) оказалось равным нулю, а вдоль поверхности (по оси OX) — равным S:

$$0 = \upsilon_0 \sin\alpha t_1 - \frac{g\cos\beta t_1^2}{2}; \qquad s = \upsilon_0 \cos\alpha t_1 - \frac{g\sin\beta t_1^2}{2}.$$

По условию задачи υ_0, α и β нам заданы, поэтому в составленных уравнениях имеется две неизвестные величины: *S* и *t*.

Из первого уравнения определяем время полета камня:

$$t_1 = \frac{2\upsilon_0 \sin a}{g\cos a}.$$

Подставляя это выражение во второе уравнение, находим:

$$s = \frac{2\upsilon_0 \sin\alpha \cdot \cos(\alpha+\beta)}{g\cos\alpha}$$

Если подставить сюда значение $\beta = 0$, что соответствует случаю, когда тело брошено под углом α а к горизонтальной поверхности, то получим:

$$s = \frac{\upsilon_0^2 \sin 2a}{g}.$$

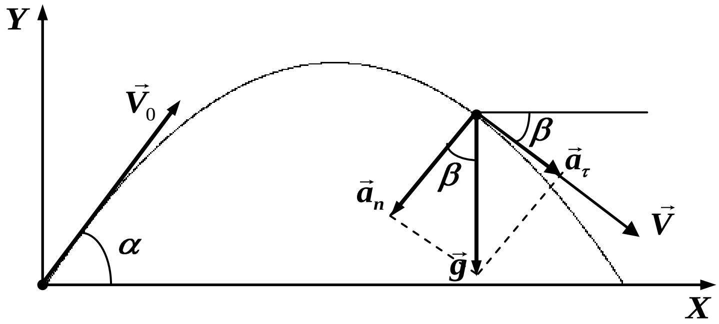
Как и следовало ожидать, этот результат совпадает с результатом предыдущего примера.

Ответ: $s = \dfrac{\upsilon_0^2 \sin 2\alpha}{g}$

Пример 1.11 Тело брошено со скоростью $V_0 = 10\,м/с$ под углом $\alpha = 45^0$ к горизонту. Определить: а) величину скорости; б) нормальное ускорение; в) тангенциальное ускорение; г) радиус кривизны траектории через $t = 1\,c$ после начала движения. Сопротивление воздуха не учитывать.

Решение:

В данной задаче пренебрегаем размерами тела. Рассматриваем его движение как движение точки с постоянным ускорением, равным $\vec{g}$. Записываем зависимости проекций вектора скорости от времени на оси декартовой системы координат



$$V_x(t) = V_{0x} + a_x t, \quad V_y(t) = V_{0y} + a_y t. \qquad (1)$$

Из рисунка видно, что

$$V_{0x} = V_0 \cos\alpha; \quad V_{0y} = V_0 \sin\alpha; \quad a_x = g\cos 90^0 = 0; \quad a_y = g\cos 180^0 = -g. \qquad (2)$$

С учетом полученных соотношений (2) равенства (1) примут вид

$$V_x(t) = V_0 \cos\alpha, \quad V_y(t) = V_0 \sin\alpha - gt. \qquad (3)$$

Величина вектора скорости связана с проекциями соотношением

$$V = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2}} \qquad (4)$$

Из соотношений (3) вместо проекций V_x и V_y подставляем в равенство (4), имеем следующее соотношение:

$$V = \sqrt{(V_0\cos\alpha)^2 + (V_0\sin\alpha - gt)^2}\;. \qquad (5)$$

Из формулы (5) находим величину вектора скорости при $t = 1\,c$:

$$V = \sqrt{(10\cdot\cos 45^0)^2 + (10\cdot\sin 45^0 - 10\cdot 1)^2} \approx 7{,}65\,\frac{м}{с}\,.$$

Из рисунка видно, что величины нормального ускорения и ускорения свободного падения связаны соотношением

$$a_n = g\cos\beta\,, \qquad (6)$$

где $\cos\beta = \dfrac{V_x}{V} = \dfrac{V_0\cos\alpha}{V}$.

Находим величину нормального ускорения в момент времени $t = 1\,c$

$$a_n = g\cos\beta = g\,\frac{V_0\cos\alpha}{V} = 10\cdot\frac{10\cdot\cos 45^0}{7{,}65} \approx 9{,}24\,\frac{м}{с^2}\,.$$

Тангенциальное ускорение при $\boldsymbol{t=1\,c}$ вычислим по формуле

$$a_\tau = \sqrt{g^2 - a_n^{\;2}} = \sqrt{10^2 - 9,24^2} \approx 3,82\,\frac{м}{c^2}.$$

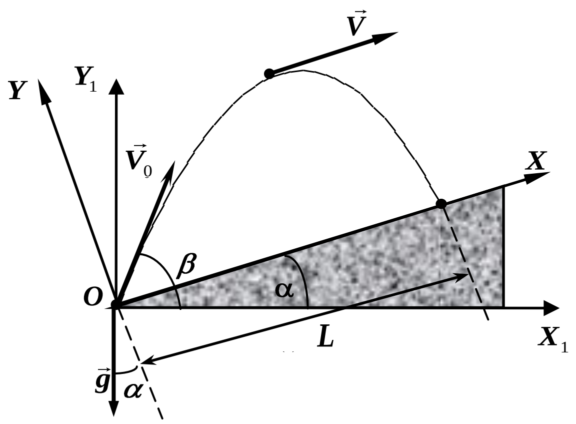
Радиус кривизны траектории в момент времени $\boldsymbol{t=1\,c}$ связан с величинами скорости и нормального ускорения соотношением: $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$.

Откуда $\rho = \dfrac{V^2}{a_n} = \dfrac{7,65^2}{9,24} \approx 6,33\,м$.

Ответ: $V \approx 7,65\,\dfrac{м}{c}$, $a_n \approx 9,24\,\dfrac{м}{c^2}$, $a_\tau \approx 3,82\,\dfrac{м}{c^2}$, $\rho \approx 6,33\,м$.

Пример 1.12 Из миномета ведут обстрел объекта, расположенного выше по склону на расстоянии $\mathbf{L = 8\,км}$. Угол наклона горы $\boldsymbol{\alpha = 30^0}$. Мины вылетают из миномета под углом $\boldsymbol{\beta = 60^0}$. Определить начальную скорость мин и наибольшее удаление мин от поверхности горы.

Решение:



Для определения начальной скорости мины удобно выбрать систему координат $\mathbf{X_1OY_1}$ так, чтобы координатные оси лежали в плоскости траектории полета мин. Ось OX_1 направим горизонтально, а ось OY_1 вертикально вверх. Начало координат совмести с точкой, откуда производят выстрел. Определим начальные координаты мины, проекции ее начальной скорости и вектора ускорения на оси координат:

$$x_0 = 0\;;\; V_{0x} = V_0\cos\beta\;;\; a_x = 0\;;$$

$$y_0 = 0\;;\; V_{0y} = V_0\sin\beta\;;\; a_y = -g\;.$$

Запишем уравнения движения мины в данной системе координат:

$$x(t) = x_0 + V_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \Rightarrow x(t) = V_0\cos\beta\cdot t\;;\; y(t) = y_0 + V_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} \Rightarrow y(t) = V_0\sin\beta\cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

Определим координаты точки приземления мины:

$$x = L\cos\alpha\;;\; y = L\sin\alpha\,.$$

Подставим координаты точки приземления в уравнения движения, получим систему уравнений, позволяющую определить начальную скорость мины:

$$L\cos\alpha = V_0\cos\beta\cdot t\;;\; \Rightarrow L\sin\alpha = V_0\sin\beta\cdot t - \frac{gt^2}{2}$$

Из первого уравнения находим время и подставляем во второе уравнение, получим уравнение для определения начальной скорости:

$$t = \frac{L\cos\alpha}{V_0\cos\beta} \Rightarrow L\sin\alpha = V_0\sin\beta\cdot\left(\frac{L\cos\alpha}{V_0\cos\beta}\right) - \frac{g\left(\dfrac{L\cos\alpha}{V_0\cos\beta}\right)^2}{2}.$$

Решив данное уравнение, получим формулу для вычисления начальной скорости полета мин:

$$V_0 = \frac{L\cos\alpha}{\cos\beta}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dfrac{2}{g}L\;\;\cos\alpha\cdot tg\beta - \sin\alpha}}.$$

Подставляя численные значения величин, входящих в последнюю формулу, получим величину начальной скорости мин.

$$V_0 = \frac{8000 \cdot \cos 30^0}{\cos 60^0} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{2}{9,81} \cdot 8000 \cdot \cos 30^0 \cdot tg \ 60^0 - \sin 30^0}} = 343 \ \ м/с$$

Выберем новую систему координат, так как в системе координат X_1OY_1 определение максимального удаления сопряжено с огромными трудностями. Предоставляем проверить данный факт читателю самостоятельно. Возьмем систему координат XOY (см. рис.), оси координат которой расположим в плоскости траектории полета мины, а начало координат совместим с точкой старта. Ось OX направим вдоль склона горы, а ось OY — перпендикулярно оси OX. Определим начальные координаты мины, проекции ее начальной скорости и вектора ускорения на оси координат.

$$x_0 = 0 \ ; \ V_{0x} = V_0 \cos \ \beta - \alpha \ \ ; \ a_x = -g \sin \alpha \ ;$$

$$y_0 = 0 \ ; \ V_{0y} = V_0 \sin \ \beta - \alpha \ \ ; \ a_y = -g \cos \alpha \ .$$

Запишем уравнения движения мины и зависимость проекции ее скорости на ось OY в данной системе координат:

$$x(t) = x_0 + V_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2} \Rightarrow x(t) = V_0 \cos(\beta - \alpha) \cdot t - \frac{g \sin \alpha \cdot t^2}{2} \ ;$$

$$y(t) = y_0 + V_{0y} t + \frac{a_y t^2}{2} \Rightarrow y(t) = V_0 \sin(\beta - \alpha) \cdot t - \frac{g \cos \alpha \cdot t^2}{2} \ ;$$

$$V_y(t) = V_{0y} + a_y t \Rightarrow V_y(t) = V_0 \sin(\beta - \alpha) - g \cos \alpha \cdot t \ .$$

В момент максимального удаления мины от поверхности горы, ее скорость обязательно должна быть направлена параллельно поверхности горы (см. рис.). В противном случае, мы будет иметь ненулевую проекцию вектора скорости мины на ось OY, т.е. мина будет либо удаляться от поверхности горы, либо приближаться к поверхности. Поэтому в момент максимального удаления мины от поверхности горы проекция вектора скорости на ось OY будет равна нулю, т.е. $V_y(t) = 0$. Подставив данное значение проекции вектора скорости в последнее соотношение, получим значение времени, когда мина находится на максимальном удалении от поверхности горы: $0 = V_0 \sin(\beta - \alpha) - g \cos \alpha \cdot t \Rightarrow t = \dfrac{V_0 \sin(\beta - \alpha)}{g \cos \alpha}$.

Поставив полученное значение времени в уравнение движения мины по оси OY, получим ее координату **y** в этот момент. Это значение координаты будет являться максимальным расстоянием от мины до поверхности горы:

$$y_{\max} = y\left(\frac{V_0 \sin \ \beta - \alpha}{g \cos \alpha}\right) = V_0 \sin \ \beta - \alpha \ \cdot \left(\frac{V_0 \sin \ \beta - \alpha}{g \cos \alpha}\right) - \frac{g \cos \alpha \cdot \left(\dfrac{V_0 \sin \ \beta - \alpha}{g \cos \alpha}\right)^2}{2} \Rightarrow y_{\max} = \frac{V_0 \sin \ \beta - \alpha \ ^2}{2g \cos \alpha}$$

Подставив численные значения величин, входящих в последнюю формулу, получим величину наибольшего удаления мины от поверхности горы:

$$y_{\max} = \frac{(343 \cdot \sin(60^0 - 30^0))^2}{2 \cdot 9,81 \cdot \cos 30^0} = 1731 \ м$$

Ответ: $\boldsymbol{V_0 = 343 \ \ м/с}$, $\boldsymbol{y_{\max} = 1731 \ \ м}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 1.1 Материальная точка движется прямолинейно. Уравнение движения имеет вид $x = 4t - 0.05t^2$. Опре6делите момент времени, когда скорость точки равна нулю. Найти координату и ускорение точки в этот момент времени.

Ответ: $t = 40с;\ x = 80м;\ a = -0.1\dfrac{м}{с^2}$.

Задача 1.2 За время $t = 6$ с точка прошла путь, равный половине длины окружности радиусом R = 0,8 м. Определить среднюю путевую скорость <v> за это время и модуль вектора средней скорости |<v>|. ***Ответ:*** $\langle v\rangle = 0.84\dfrac{м}{с}$; $\left|\langle\vec{v}\rangle\right| = 0.27\dfrac{м}{с}$.

Задача 1.3 Движение точки по окружности радиусом R = 4 м задано уравнением $\xi = A + Bt + Ct^2$, где А = 10 м, В = - 2 м/с, С = 1 м/с^2. Найти тангенциальное a_τ , нормальное a_n и полное a ускорения точки в момент времени t = 2с. ***Ответ:*** $a_\tau = 2\dfrac{м}{с^2}$; $a_n = 1\dfrac{м}{с^2}$; $a = 2.24\dfrac{м}{с^2}$

Задача 1.4 Велосипедное колесо вращается с частотой n = 5 с$^{-1}$. Под действием сил трения оно остановилось через интервал времени Δt = 1 мин. Определить угловое ускорение и число оборотов N, которое сделает колесо за это время. ***Ответ:*** $\varepsilon = -0.52\dfrac{рад}{с^2}$ **;** $N = 150$.

Задача 1.5 Линейная скорость точек на окружности вращающегося диска равна 3 м/с. Точки, расположенные на 10 см ближе к оси, имеют линейную скорость 2 м/с. Определить частоту вращения n диска. ***Ответ:*** $n = 1.59\dfrac{об}{с}$ **.**

Задача 1.6 С какой высоты H упало тело, если последний метр своего пути оно прошло за время 0,1 с? ***Ответ:*** $H = \dfrac{2S + gt^2}{8gt^2} = 5.61\ м$.

Задача 1.7 С вышки бросили камень в горизонтальном направлении. Через промежуток времени 2 с камень упал на землю на расстоянии 40 м от основания вышки. Определить начальную v_0 и конечную v скорости камня. ***Ответ:*** $v_0 = 20\dfrac{м}{с}$ **,** $v = 28\dfrac{м}{с}$ **.**

Задача 1.8 Две прямые дороги пересекаются под углом 60°. От перекрестка по ним удаляются машины: одна со скоростью 60 км/ч, другая со скоростью 80 км/ч. Определить скорости v' и v'', с которыми одна машина удаляется от другой. Перекресток машины прошли одновременно. ***Ответ:*** $v' = 122\dfrac{км}{ч}$ **;** $v'' = 72.2\dfrac{км}{ч}$

Задача 1.9 Винт аэросаней вращается с частотой n=360 мин^1. Скорость v поступательного движения аэросаней равна 54 км/ч. С какой скоростью v движется один из концов винта, если радиус R винта равен 1 м? ***Ответ:*** $v = 40.6\dfrac{м}{с}$.

Задача 1.10 Уравнение прямолинейного движения имеет вид $x = At + Bt^2$, где A = 3 м/с, B = - 0,25 м/с^2. Построить графики зависимости координаты и пути от времени для заданного движения.