2. ДИНАМИКА

Динамикой называется раздел механики, изучающий закономерности движения тел, обусловленные действующими на них силами.

§ 2.1 Инерциальные системы отсчета. Законы Ньютона

В разделе «Кинематика» мы рассмотрели описание простейших типов механических движений. При этом нас не интересовали причины изменения положения тел, а систему отсчета мы выбирали из соображений удобства при решении той или иной задачи. В динамике, прежде всего, представляют интерес причины, вследствие которых некоторые тела начинают двигаться относительно других тел. Было установлено, что изменение скорости тела, а значит появление ускорения, вызывается действием на тело каких-то других тел.

Механическим взаимодействием *называется взаимодействие, в результате которого тела изменяют свою скорость или деформируются.*

Мерой взаимодействия одного тела с другими телами является сила.

Силой $\vec{F}$ *называется векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или физических полей (гравитационного, электрического, магнитного, электромагнитного) и характеризующая величину и направление этого воздействия.*

Сила характеризуется:

1. направлением,
2. величиной (или модулем),
3. точкой приложения силы (от этого может зависеть результат действия силы).

Под действием силы тела могут деформироваться (то есть менять форму или размеры тела) и приобретать ускорение.

Сила по своей природе является векторной величиной, в системе СИ единицей её измерения является *ньютон* (H).

Опыт показывает, что любое тело «сопротивляется» попытке изменить его скорость. Это свойство тел называется ***инертностью***.

Движением по инерции *называется движение тела, происходящее без воздействия на него других тел или полей.*

Наблюдения показывают, что под действием сил тела изменяют свою скорость постепенно и не одинаково. Известно, что под действием разных сил F_i, одно и то же тело получает разные ускорения a_i, однако отношение $\dfrac{F_i}{a_i}$ для данного тела есть величина постоянная. Эту константу назвали ***инертной массой*** m. Различают ещё ***гравитационную массу*** как меру гравитационного взаимодействия тел. То есть масса тела является гравитационным зарядом, наподобие электрического заряда.

Таким образом, ***масса*** *– это скалярная физическая величина, характеризующая инертные и гравитационные свойства тел.*

В системе СИ масса тела измеряется в килограммах (кг).

Наблюдения показывают тождественность инертной и гравитационной масс, то есть $m_{инертная} \equiv m_{гравитационная}$, поэтому их обычно не различают и называют просто массой тела. Масса – величина аддитивная, то есть масса тела равна сумме масс всех его частей. Она не зависит от температуры тела, его агрегатного состояния, наличия электрических и магнитных полей.

Однако взаимодействие тела с другими телами не всегда обеспечивает появление ускорения для рассматриваемого тела. Иногда тело под действием сил движется равномерно и прямолинейно. Почему в одном случае тело движется равномерно, в другом случае — с ускорением, ответил английский учёный Исаак Ньютон. Он сформулировал три закона, которые в настоящее время носят его имя, и которые позволяют решать практически любые задачи классической динамики. Рассмотрим эти законы.

2.1.1 Первый закон Ньютона

Первый закон Ньютона (***закон инерции***):

Существуют такие системы отсчета, относительно которых тело движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или действие других тел скомпенсировано.

Суть этого закона в следующем:

1. он говорит о том, когда тело движется без ускорения, то есть $\vec{a}=0$, если $\sum \vec{F}_i = 0$,

2. он вводит в рассмотрение следующие понятия:

- ***инерциальные системы отсчёта*** (это системы отчёта, движущиеся без ускорения),
- ***неинерциальные системы отсчёта*** (это системы отчёта, движущиеся с ускорением).

Из первого закона Ньютона следует, что покой и равномерное прямолинейное движение – это фактически одно и то же состояние, так как тело одновременно может покоиться относительно одних тел и двигаться равномерно и прямолинейно относительно других тел. Таким образом, состояние покоя понятие относительное.

Следует отметить, что первый закон Ньютона справедлив только в инерциальных системах отчёта. Любая система отчёта, движущаяся относительно инерциальной равномерно и прямолинейно (то есть без ускорения), то же является инерциальной.

Систему отсчета, связанную с поверхностью Земли, не смотря на то, что Земля вращается вокруг своей оси и одновременно вокруг Солнца (то есть движется как минимум с центростремительным ускорением), для достаточно большого количества задач можно считать инерциальной. Это связано с тем, что величина этого ускорения очень мала.

Таким образом, первый закон Ньютона говорит о том, когда тело движется без ускорения, то есть $\vec{a}=0$, если $\sum \vec{F}_i=0$.

2.1.2 Второй закон Ньютона

Второй закон Ньютона (***основное уравнение динамики поступательного движения***):

В инерциальной системе отсчёта векторная сумма всех сил, действующих на тело, равна произведению массы этого тела на сообщённое ему ускорение.

$$\sum \vec{F}_i = m\vec{a} \quad \text{или} \quad \vec{F}_{рез} = m\vec{a}. \qquad (2.1)$$

где $\vec{F}_{рез} = \vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \ldots \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$ - ***результирующая*** (или ***равнодействующая***) всех сил, действующих на тело.

Само выражение $\vec{F}_{рез} = \vec{F}_1 + \vec{F}_1 + \ldots \vec{F}_n = \sum \vec{F}_i$, являющееся обобщением опытных данных и характеризующее независимость действия сил, называется ***принципом суперпозиции сил***.

Здесь $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ - силы, действующие на данное тело.

Уравнение (2.1) определяет размерность силы: $\left[\vec{F}\right] = \frac{кг \cdot м}{c^2} = H$, Ньютон.

Следует отметить, что второй закон Ньютона в форме (2.1) можно применять только в том случае, если масса тела при движении не изменяется. В противном случае необходимо пользоваться более универсальной записью закона, данной самим Ньютоном.

Посмотрите, как оно получается:

$$\vec{F}_{рез} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\ \ m\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

где $\vec{p} = m\vec{v}$ - называется ***импульсом тела***, $p = \frac{кг \cdot м}{c} = H \cdot c$.

Таким образом, второй закон Ньютона можно сформулировать так:

Скорость изменения импульса тела равна действующей на него результирующей силе.

$$\vec{F}_{рез} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (2.2)$$

Суть второго закона Ньютона в следующем:

1. уравнение (2.1) говорит о том, когда тело движется с ускорения, то есть $\vec{a} \neq 0$, если $\sum \vec{F}_i \neq 0$,
2. так как масса тела всегда величина положительная, то из определения произведения вектора на число вытекает то, что вектор ускорения всегда сонаправлен с результирующей всех сил, действующих на тело, то есть: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n \uparrow\uparrow \vec{a}$,
3. из уравнения (2.2) следует, что сила является мерой быстроты изменения импульса тела.

2.1.3 Третий закон Ньютона

Третий закон Ньютона (*закон действия и противодействия*):

Тела действуют друг на друга, с силами, равными по величине и противоположными по направлению.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 .$$

Третий закон Ньютона говорит о том, что:

1. силы всегда возникают парами,
2. силы всегда одинаковой природы, приложены к разным телам и противоположно направлены.

Ньютон, исследуя и анализируя движение различных тел, показал, что все сколь угодно сложные механические движения можно описать в рамках трех законов динамики.

Для успешного решения большинства задач с использованием второго закона Ньютона необходимо придерживаться некоторой последовательности действия (своего рода алгоритма). Рассмотрим основные пункты данного алгоритма.

1. Проанализировать условие задачи и выяснить, с какими физическими полями и какими телами взаимодействует рассматриваемое тело. Исходя из этого, определить количество сил, действующих на рассматриваемое тело. Затем сделать рисунок, на котором указать все силы, действующие на тело.
2. Используя условие задачи, определить направление ускорения рассматриваемого тела, и изобразить вектор ускорения на рисунке.
3. Записать второй закон Ньютона в векторной форме, то есть:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = m\vec{a} ,$$

где $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ - силы, действующие на тело.

4. Выбрать удобную инерциальную систему отсчета. Изобразить на рисунке прямоугольную систему координат, ось OX которой обычно направляют по вектору ускорения тела, а оси OY и OZ перпендикулярно оси OX. Для сил, лежащих в одной плоскости, достаточно две оси координат OX и OY. Начало координат обычно помещают в центре масс тела.
5. Воспользовавшись основным свойством векторных равенств, записать второй закон Ньютона для проекций векторов на оси координат, т.е.:

$$OX: \quad F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx} = ma_x ;$$
$$OY: \quad F_{1y} + F_{2y} + \ldots + F_{ny} = 0 ;$$
$$OZ: \quad F_{1z} + F_{2z} + \ldots + F_{nz} = 0$$

Если в задаче кроме сил и ускорений требуется определить координаты и скорость тела, то кроме второго закона Ньютона необходимо записать и кинематические уравнения движения.

6. Записав систему уравнений, необходимо обратить внимание на то, чтобы число уравнений равнялось числу неизвестных в данной задаче.
7. Далее необходимо решить систему уравнений и найти соотношения для величин, которые требуется определить в данной задаче. Проверить размерность полученного равенства и только потом в полученные формулы подставить цифровые данные, предварительно переведя их в одну и ту же систему единиц .

§ 2.2 Силы в механике

2.2.1 Сила всемирного тяготения $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{гр}}$. *Сила тяжести* $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{тяж}}$

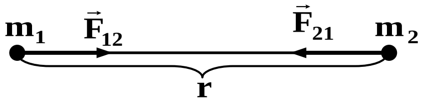


Рис. 2.1

Сила всемирного тяготения возникает в процессе взаимодействия между телами, обладающими массами. Пусть две материальные точки массами m_1 и m_2 находятся на расстоянии r друг от друга. Тогда согласно закону Всемирного тяготения, сформулированному Ньютоном, следует:

две материальные точки притягиваются друг к другу с силами, величины которых прямо пропорциональны их массам и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними:

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \left|\vec{F}_{12}\right| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (2.3)$$

Коэффициент пропорциональности G получил название ***гравитационной постоянной***. Его величина в системе СИ равна $G = 6,67\cdot 10^{-11}\ \frac{Н\cdot м^2}{кг^2}$.

Силы взаимного притяжения направлены вдоль одной прямой, соединяющие эти материальные точки (см. рис. 2.1). Закон всемирного тяготения справедлив для тел, размеры которых малы по сравнению с расстоянием между ними (то есть для материальных точек). Если размеры тел сравнимы с расстоянием между ними, то для вычисления силы взаимодействия между ними поступают следующим образом. Каждое из тел разбивают на такие бесконечно малые части, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними. Далее вычисляют силы взаимодействия каждой части одного тела с каждой частью другого тела. Полная сила взаимного притяжения равна сумме сил, действующих со стороны всех элементов одного тела на все элементы другого тела. Проведя такие рассуждения для однородных шаров, можно показать, что результирующая сила притяжения вычисляется по формуле, приведенной ранее. В этом случае в качестве масс берется масса шаров, а в качестве расстояния берется расстояние между центрами шаров. Для тела, взаимодействующего с планетой, в качестве расстояния берется расстояние от центра планеты до центра масс тела. Приведем формулу для силы притяжения тел к планетам:

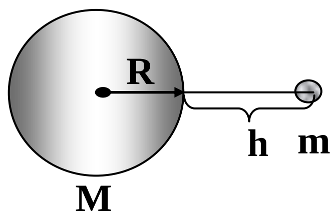


Рис. 2.2

$$F_{гр} = G\frac{mM}{(R+h)^2}. \qquad (2.4)$$

Обычно силу притяжения тела к планете называют ***силой тяжести*** $\vec{F}_{тяж}$, величину которой принято вычислять по формуле

$$\vec{F}_{тяж} = m\vec{g},$$

где m - масса тела, $\vec{g}$ - ускорение свободного падения.

Отсюда вытекает соотношение, устанавливающее связь величины ускорения свободного падения с массой планеты, ее радиусом и высотой от рассматриваемой точки до поверхности планеты:

$$mg = G\frac{mM}{(R+h)^2} \;\Rightarrow\; g = G\frac{M}{(R+h)^2}.$$

На поверхности планеты, т.е. когда $h = 0$, для ускорения свободного падения справедлива формула

$$g = G\frac{M}{R^2}. \qquad (2.5)$$

2.2.2 *Сила реакции опоры* $\vec{N}$. *Вес тела* $\vec{P}$. *Невесомость*

Силы реакции возникают при взаимодействии тела с различными конструкциями, ограничивающими его положение в пространстве. Например, на тело, подвешенное на нити, действует сила реакции, называемая обычно ***силой натяжения нити*** $\vec{T}$. Сила натяжения нити направлена всегда вдоль нити. Формулы для вычисления ее величины нет. Обычно величину ее находят либо из первого, либо из второго закона Ньютона. К силам реакции также относят силы, действующие на частицу на гладкой поверхности. Её называют ***силой нормальной реакции опоры*** и обозначают $\vec{N}$. Сила реакции опоры всегда направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения с телом. Со стороны тела на гладкую поверхность действует сила, называемая ***силой нормального давления*** $\vec{N}'$. По третьему закону Ньютона сила реакции опоры $\vec{N}$ равна по величине и противоположна по направлению силе нормального давления $\vec{N}'$. Частным случаем силы реакции опоры является сила, называемая *весом тела*.

Вес тела $\vec{P}$ *— это сила, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, действует на опору или растягивает подвес.*

По третьему закону Ньютона вес тела численно равен силе, с которой опора или подвес действует на данное тело. Векторы силы реакции $\vec{N}$ и веса тела $\vec{P}$ противоположно направлены (см. рис. 2.3).

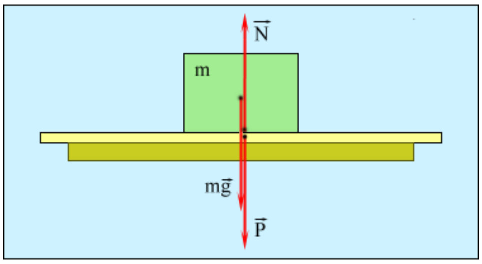


Рис. 2.3

Если тело находится на горизонтальной поверхности в состоянии покоя, то вес тела численно равен силе тяжести. Однако при движении с ускорением вес тела может значительно отличаться от силы тяжести. При определенных условиях тело может не оказывать действия на опору или подвес, в таком случае говорят, что тело находится в *состоянии невесомости*.

Представим себе динамометр с подвешенным к нему грузом. Если же динамометр выпустить из рук, то есть предоставить ему свободно падать вместе с телом, то показания динамометра при полете будут равны нулю. Это и есть состояние невесомости для рассматриваемого тела.

2.2.3 *Сила упругости* $\vec{F}_{упр}$

Силы упругости возникают в телах в том случае, если тела деформированы, то есть, если изменена форма тела или его объём. При прекращении деформации силы упругости исчезают. Следует заметить, что, хотя силы упругости возникают при деформациях тел, не всегда деформация приводит к возникновению сил упругости. Силы упругости возникают в телах, способных восстанавливать свою форму после прекращения внешнего воздействия. Такие тела, и соответствующие им деформации, называются ***упругими***. При ***пластической деформации*** изменения полностью не исчезают после прекращения внешнего воздействия. Ярким примером проявления сил упругости могут служить силы, возникающие в пружинах, подверженных деформации. *Для упругих деформаций, возникающих в деформированных телах, сила упругости всегда пропорциональна величине деформации.*

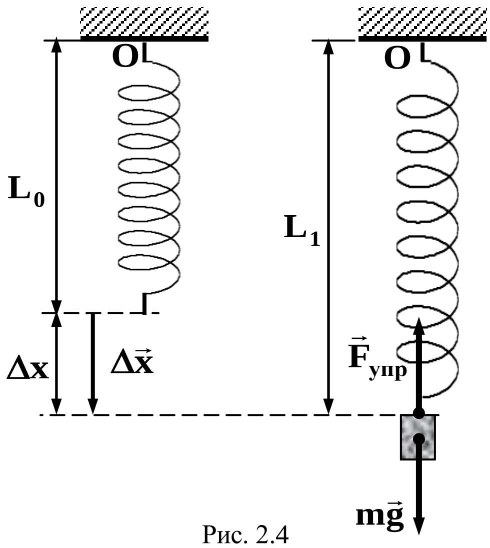


Рис. 2.4

Данное утверждение получило название **закона Гука**.

Рассмотрим такой пример. Пусть дана пружина, закрепленная верхним концом в точке O, которая имеет в нерастянутом состоянии длину L_0. Если на пружину повесить груз массой m, то в точке подвеса на пружину будет действовать сила тяжести груза $m\vec{g}$. При этом пружина удлиняется на величину Δx. Длина ее при этом равна L_1. Для компенсации силы тяжести, вызывающей деформацию пружины, в ней возникает сила упругости. При этом вектор силы упругости $\vec{F}_{упр}$ будет направлен против вектора силы тяжести. Согласно закону Гука для величины вектора силы упругости будем иметь следующее соотношение:

$$F_{упр} = k\Delta x, \tag{2.6}$$

где k- коэффициент упругости (или жесткости) пружины. В векторном виде закон Гука записывается в следующем виде:

$$\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{x}, \tag{2.7}$$

где $\Delta\vec{x}$- вектор деформации пружины. Знак минус в данном равенстве указывает на то, что вектор силы упругости всегда направлен против вектора деформации пружины. Заметим, что закон Гука выполняется только в области упругих деформаций, то есть в том случае, когда после снятия внешнего воздействия пружина возвращается в исходное состояние.

2.2.4 Силы трения $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{тр}}$

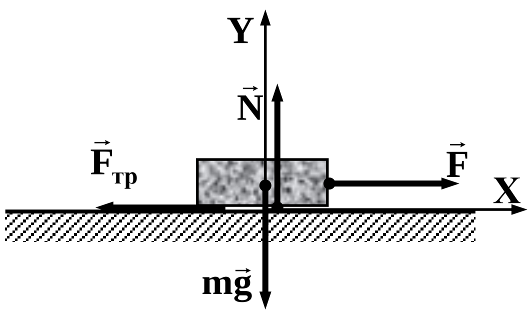


Рис. 2.5

При движении одного тела по поверхности другого возникают силы, препятствующие этому движению. Такие силы принято называть *силами трения скольжения* $\vec{F}_{тр}$. Кроме силы трения скольжения существует *сила трения покоя*. Рассмотрим следующий пример. Пусть на горизонтальной поверхности находится тело. Приложим к данному телу горизонтально направленную силу $\vec{F}$ так, как показано на рис. 2.5. Изобразим на этом рисунке все силы, с которыми внешние тела действуют на рассматриваемое тело. Обозначим силу, с которой горизонтальная поверхность действует на тело через $\vec{N}$, силу тяжести — через $m\vec{g}$, силу с которой горизонтальная поверхность препятствует движению тела (силу трения) — через $\vec{F}_{тр}$. Если приложить небольшую по величине силу $\vec{F}$, то мы увидим, что тело остается в покое, так как действие нашей силы скомпенсировано действием силы трения покоя. Очевидно, что направление силы трения покоя противоположно внешней силе $\vec{F}$. *Величина силы трения покоя находится из условия равновесия тела, то есть из первого закона Ньютона.* В качестве примера получим формулу для вычисления силы трения покоя, действующей на тело. Выберем оси координат так, как показано на рисунке. Запишем первый закон Ньютона в векторной форме

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{тр} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

Используя основное свойство векторных равенств, запишем равенства для проекций этих векторов на оси координат:

$$OX: \quad F - F_{тр} = 0;$$

$$OY: \quad N - mg = 0.$$

Из первого уравнения находим силу трения $F_{тр} = F$. Таким образом, для заданного направления внешней силы F величина силы трения покоя равна величине силы F.

Из данных рассуждений можно сделать следующий вывод: *величина силы трения покоя находится из условия равновесия тела.* Для определения направления вектора силы трения покоя можно пользоваться следующим правилом:

- вначале нужно изобразить все силы, действующие на тело (за исключением силы трения) и определить направление возможного движения тела,

- затем изобразить вектор силы трения покоя так, чтобы он был направлен против возможного движения тела относительно рассматриваемой поверхности.

В качестве примера рассмотрим кирпич, лежащий неподвижно на ленте транспортера. При включении транспортера лента вместе с кирпичом поднимаются вверх так, как показано на рис.2.6. Изобразим все силы, действующие на кирпич, находящийся на ленте (кроме силы трения). Такими силами являются две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. В отсутствие силы трения между кирпичом и поверхностью ленты, кирпич был бы неподвижным относительно поверхности Земли, при этом лента транспортера двигалась бы так, как показано на рисунке. Таким образом, относительно ленты транспортера кирпич перемещался бы вниз вдоль поверхности ленты. Отсюда следует, что вектор силы трения покоя, действующей на кирпич со стороны поверхности ленты, направлен вверх вдоль ее поверхности. Изображаем пунктиром вектор $\vec{F}_{тр}$ на рисунке. Заметим, что в данном случае вектор силы трения покоя, действующей на кирпич, направлен по скорости движения ленты транспортера.

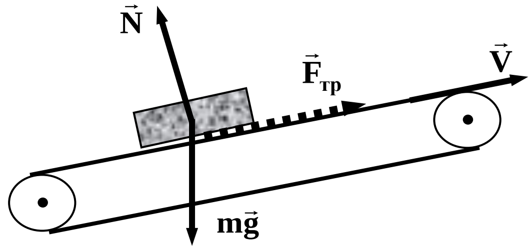


Рис. 2.6

Рассмотрим теперь автомобиль, который начинает движение из состояния покоя. Допустим, что ведущими являются задние колеса. Определим направление сил трения, действующих на передние и задние колеса автомобиля. Для того чтобы определить возможное перемещение шины ведущего колеса относительно поверхности Земли, представим себе, что автомобиль находится на абсолютно гладкой поверхности. В этом случае автомобиль не сможет тронуться с места, так как шины будут проскальзывать относительно поверхности Земли. Исходя из направления вращения шин при проскальзывании, делаем вывод о том, что сила трения $\vec{F}_{тр1}$, действующая на шины ведущего колеса, направлена по скорости движения автомобиля. При этом сила трения $\vec{F}_{тр2}$, действующая на ведомые (передние) колеса, будет препятствовать перемещению автомобиля и направлена против скорости его движения (см. рис. 2.7). Заметим, что в данном случае силой тяги, действующей на автомобиль, является сила трения покоя $\vec{F}_{тр1}$.

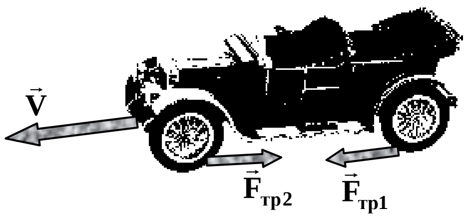


Рис. 2.7

Величина силы трения покоя может изменяться в зависимости от приложенной внешней силы. При некотором значении внешней силы сила трения покоя достигает максимального значения. После этого начинается скольжение тела. *Сила трения, действующая на тело, перемещающееся относительно поверхности, называется* ***силой трения скольжения.*** Экспериментально установлено, что сила трения скольжения прямо пропорциональна силе нормального давления тела на поверхность. Заметим, что из третьего закона Ньютона следует, что сила нормального давления тела на поверхность всегда равна силе реакции, с которой сама поверхность действует на движущееся тело. С учетом этого запишем формулу для вычисления величины силы трения скольжения:

$$F_{тр.скольжения} = \mu N\,, \tag{2.8}$$

где N - величина силы реакции опоры; μ - коэффициент трения скольжения.

Сила трения скольжения, действующая на движущееся тело, всегда направлена против его скорости, вдоль соприкасающихся поверхностей.

При движении тел в жидкостях и газах возникают также силы трения, но они существенно отличаются от сил сухого трения. Эти силы называются ***силами вязкого трения***, или ***силами сопротивления.*** Силы вязкого трения возникают только при относительном движении тел.

Силы сопротивления зависят от многих факторов, а именно: от размеров и формы тела, от свойств среды (плотности, вязкости), от скорости относительного движения.

При скоростях тел много меньших скорости звука в данной среде, сила сопротивления прямо пропорциональна относительной скорости тела, то есть:

$$\vec{F}_{сопротивления} = -\alpha\vec{V}\ . \tag{2.9}$$

При скоростях тел близких к скорости звука в данной среде сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости тела относительно среды, то есть:

$$\vec{F}_{сопротивления} = -\beta\vec{V}^2 \tag{2.10}$$

Здесь α и β - коэффициенты пропорциональности, называемые *коэффициентами сопротивления*.

2.2.5 Сила Архимеда $\vec{\mathbf{F}}_{\mathbf{арх}}$

Наблюдения показывают, что на тело, погружённое в жидкость или газ, действует направленная вертикально вверх выталкивающая сила, которую называют ***силой Архимеда***.

Силу Архимеда можно определить по формуле $F_{арх} = \rho_{ж} g V_T$,

где $\rho_{ж}$ - плотность жидкости (или газа), в которой находится тело, $\left[\dfrac{кг}{м^3}\right]$,

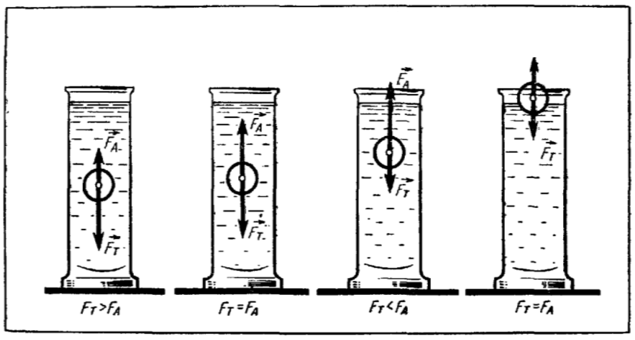
g – ускорение свободного падения,

V_T - объём погружённой в жидкость части тела, $\left[м^3\right]$.

Закон Архимеда: *на тело, погруженное в жидкость или газ, действует направленная вертикально вверх выталкивающая сила, равная по величине весу жидкости или газа, вытесненной телом.*

Особенность силы Архимеда: она приложена к центру тяжести объёма вытесненной телом жидкости и направлена вертикально вверх.

2.2.6 Условия плавания тел



- если $\rho_{тела} \geq \rho_{жидкости}$, то тело тонет,
- если $\rho_{тела} \leq \rho_{жидкости}$, то тело всплывает,
- если $\rho_{тела} = \rho_{жидкости}$, то тело находится во взвешенном состоянии.

§ 2.3 Движение тела по наклонной плоскости

При решении задач по данной теме необходимо придерживаться схемы решения задач по динамике, изложенной ранее. Начинать решение рекомендуется с построения рисунка к задаче, на котором нужно правильно показать направление сил, действующих на тело. Обычно построение вектора силы тяжести $m\vec{g}$ и силы реакции $\vec{N}$ не вызывает особых затруднений. Недоразумения и ошибки возникают при определении направления вектора силы трения покоя. Чтобы избежать этих ошибок, нужно пользоваться рекомендациями, изложенными в пункте *2.2.4* данной главы. В том случае, если тело находится в покое или движение тела является равномерным, для решения задачи пользуются первым законом Ньютона. Если же тело движется с ускорением, применяют второй закон Ньютона. Ошибки в решении такого типа задач возникают также и при определении величины силы трения скольжения. Для определения $F_{тр.скольжения}$ пользуйтесь формулой (2.8).

§ 2.4 Движение связанных тел

При решении задач по данной теме следует обратить внимание на то, что нити, соединяющие движущиеся тела, являются невесомыми и нерастяжимыми. Предположение о том, что нить является нерастяжимой, позволяет говорить о том, что в любой момент времени ускорения, скорости и перемещения тел одинаковы и установить при необходимости связь между ними в любой момент времени. Если в задаче нет информации о массе или моменте инерции блока, через который переброшена нить и трения в оси блока нет, то величины сил натяжения нити, перекинутой через блок, по обе стороны его будут одинаковыми. В противном случае необходимо написать ещё и уравнение динамики вращательного движения для блока (см. ***§ 4.3*** главы 4. МЕХАНИКА ТВЁРДОГО ТЕЛА).

Начинать решение рекомендуется с построения рисунка к задаче, на котором нужно правильно показать направление сил, действующих на тела и векторы их ускорений. Записать второй закон Ньютона для каждого из тел. Для удобства можно выбирать систему координат отдельно для каждого тела.

§ 2.5 Динамика движения материальной точки по окружности

При прямолинейном движении твердого тела перемещения, скорости и ускорения всех его точек одинаковы, поэтому для описания такого типа движения достаточно описать движение какой-либо его точки. При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси все его точки имеют одинаковые углы поворота и угловые скорости. В том случае, когда размеры тела достаточно малы по сравнению с радиусом вращения, вращение всего тела можно рассматривать как вращение одной материальной точки. Методы решения задач по вращательному движению материальной точки практически ничем не отличаются от методов решения задач по динамике поступательного движения.

Если материальная точка движется по окружности равномерно, то в этом случае она имеет только центростремительное ускорение, вектор которого направлен к центру той окружности, по которой движется данная точка. Движение точки по окружности описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a}_ц = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n,$$

где m– масса материальной точки; $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$ - сумма всех сил действующих на материальную точку; $\vec{a}_ц$ - центростремительное ускорение.

Величина вектора центростремительного ускорения связана с основными характеристиками движения по окружности соотношением:

$$a_ц = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = 4\pi^2\nu^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

где v и ω - соответственно линейная и угловая скорости точки; ν и T - частота и период вращения; а R - радиус траектории.

При решении задач рассматриваемого типа необходимо применять алгоритм, который описывался нами ранее при решении задач по динамике прямолинейного поступательного движения тела. Для большинства задач векторы сил, действующих на точку, движущуюся по окружности, необходимо изображать в плоскости, проходящей через ось вращения и движущуюся точку.

Рассмотрим одно из таких движений.

2.5.1 Движение спутника вокруг Земли

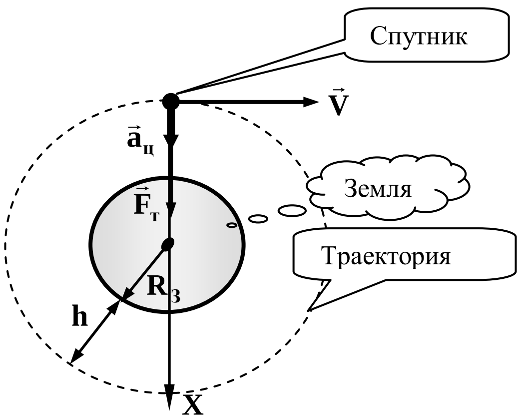


Рис. 2.8

На спутник, движущийся вокруг Земли, действует единственная сила — сила всемирного тяготения $\vec{F}_т$. Пусть траекторией его движения является окружность. В этом случае спутник движется равномерно по окружности. Изобразим вектор его скорости на рисунке. Вектор центростремительного ускорения $\vec{a}_ц$ и сила всемирного тяготения лежат в плоскости траектории. Изобразим векторы ускорения $\vec{a}_ц$ и силы $\vec{F}_{тяг}$ на рисунке. Обозначим через $R_З$ - радиус Земли; h - высоту, на которой находится спутник над поверхностью Земли. Запишем второй закон Ньютона для спутника:

$$m\vec{a}_ц = \vec{F}_т.$$

Спроектировав данное векторное равенство на ось OX, получим равенство:

$$ma_ц = F_т. \tag{2.11}$$

Для величины силы $F_т$ и центростремительного ускорения $a_ц$ имеем равенства:

$$a_ц = \frac{v^2}{R_З + h}, \qquad F_т = G\frac{mM_З}{R_З + h^{\ 2}},$$

где m - масса спутника; $M_З$ - масса Земли; **G –** гравитационная постоянная.

С учетом этих соотношений равенство (2.11) примет вид:

$$m\frac{v^2}{R_З + h} = G\frac{mM_З}{R_З + h^{\ 2}} \Rightarrow v^2 = G\frac{M_З}{R_З + h} \Rightarrow v = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З + h}}. \tag{2.12}$$

Из последнего равенства видно, что первая космическая скорость спутника зависит от радиуса планеты, ее массы и высоты спутника над поверхностью планеты. Для спутников, вращающихся на малых высотах ($h = 0$) справедлива следующая формула:

$$v_0 = \sqrt{G \cdot \frac{M_З}{R_З}}. \tag{2.13}$$

Выразим первую космическую скорость спутника, вращающегося на малой высоте, через ускорения свободного падения на поверхности Земли g_0:

$$v_0 = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З^2}R_З} = \sqrt{g_0 R_З}. \tag{2.14}$$

Заметим, что формула (2.12) справедлива для различных высот, а формулу (2.13) можно применять для небольших высот по сравнению с радиусом Земли.

2.5.2 Вес тела на поверхности Земли

Рассмотрим движение тела, расположенного на поверхности Земли. Обозначим широту местности (угол между проведенной через центр Земли прямой и плоскостью экватора) через α. На данное тело действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная к центру Земли; сила реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно горизонтальной поверхности; сила трения покоя $\vec{F}_{тр}$. Вектор силы трения покоя направлен на северный полюс Земли. Изобразим данные силы и вектор центростремительного ускорения на рисунке. Обозначим $R_З$ - радиус Земли; r - радиус вращения тела. Запишем второй закон Ньютона:

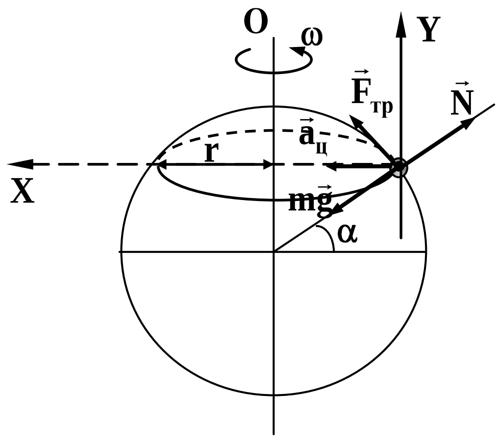


Рис. 2.9

$$m\vec{a}_ц = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Возьмем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по центростремительному ускорению, а ось OY — по вектору силы реакции. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на данные оси:

$$OX: \quad ma_ц = mg\cos\alpha - N\cos\alpha + F_{тр}\sin\alpha; \tag{2.14}$$

$$OY: \quad 0 = -mg\sin\alpha + N\sin\alpha + F_{тр}\cos\alpha. \tag{2.15}$$

Разделив обе части равенства (2.14) на $\sin\alpha$, а обе части равенства (2.15) — на $\cos\alpha$, получим систему уравнений:

$$\frac{ma_ц}{\sin\alpha} = mgctg\,\alpha - Nctg\,\alpha + F_{тр}, \tag{2.16}$$

$$0 = -mg\,tg\,\alpha + N\,tg\,\alpha + F_{тр}. \tag{2.17}$$

Вычтя из левой части равенства (2.16) левую часть равенства (2.17), а из правой части равенства (2.16) — правую часть равенства (2.17), получим уравнение:

$$\frac{ma_ц}{\sin\alpha} = mg\,ctg\,\alpha + mg\,tg\,\alpha - N\,ctg\,\alpha - N\,tg\,\alpha.$$

Откуда находим величину силы реакции покоя, действующей на тело:

$$\frac{ma_ц}{\sin\alpha} = mg\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} - N\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} \Rightarrow N - mg = -ma_ц\cos\alpha \Rightarrow N = mg - ma_ц\cos\alpha$$

Так как вес численно равен силе реакции, для веса тела в данном случае имеем следующее равенство:

$$P = m\left(g - a_ц\cos\alpha\right).$$

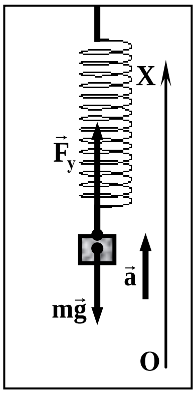
Из данного равенства видно, что вес тела зависит от широты местности α, на которой расположено тело. Кроме того, вес тела достигает максимального значения при $\alpha = 90^0$, т.е. на полюсе Земли, а минимальное значение веса достигается при $\alpha = 0^0$, т.е. на экваторе. На полюсе вес тела численно равен силе тяжести ($P = mg$).

Вопросы для самопроверки

1. Что такое явление инерции. Дайте понятие массы, импульса, силы.
2. Законы Ньютона.
3. Силы в природе: сила гравитационного взаимодействия, сила тяжести, силы трения, вес, силы реакции опоры, сила Архимеда.
4. Основное уравнение динамики поступательного движения.
5. Основное уравнение динамики вращательного движения.

§ 2.6 Примеры решения задач

Пример 2.1 В кабине лифта на динамометре висит груз массой $m = 2\,кг$. Динамометр показывает силу $F_y = 30\,H$. Определить ускорение груза. Можно ли ответить на вопрос, в каком направлении движется груз?



Решение:

На тело, движущееся с ускорением $\vec{a}$, действуют два тела: Земля с силой тяжести $m\vec{g}$ и пружина с силой $\vec{F}_y$. Изобразим силы на рисунке. Предположим, что вектор ускорения лифта направлен вверх. Изобразим вектор $\vec{a}$ на рисунке. Записываем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F}_y + m\vec{g}.$$

Выбираем ось OX по направлению ускорения. Записываем второй закон Ньютона для проекций векторов на эту ось:

$$OX: \quad ma_x = F_y - mg.$$

Из данного равенства находим проекцию ускорения на ось OX:

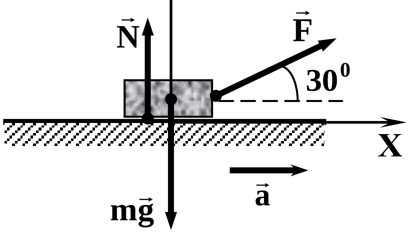
$$a_x = \frac{F_y - mg}{m} = \frac{30 - 2\cdot 10}{2} = 5\,м/с^2.$$

Так как проекция ускорения на ось OX положительная, то предположение о том, что вектор ускорения лифта направлен вертикально вверх, соответствует действительности. Определить направление движения лифта не представляется возможным, так как указанному направлению вектора ускорения соответствует два типа движения: а) равноускоренное движение вертикально вверх; б) равнозамедленное движение вертикально вниз.

Ответ: $a = 5\,м/с^2$.

Пример 2.2 На идеально гладкой горизонтальной поверхности под действием силы $F = 10\,H$, направленной под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту (см. рис.), движется тело массой $m = 2\,кг$. Определить величину вектора ускорения тела и величину силы, с которой тело действует на горизонтальную поверхность.

Решение:



На тело, движущееся с ускорением $\vec{a}$, действуют три тела: Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, горизонтальная поверхность с силой реакции $\vec{N}$ и некоторое тело с силой тяги $\vec{F}$. Изобразим силы на рисунке. Движение тела в данной задаче равноускоренно вдоль горизонтальной поверхности. Вектор ускорения направлен по движению тела. Изобразим вектор $\vec{a}$ на рисунке. Записываем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}.$$

Выбираем ось OX по ускорению, ось OY направляем вверх перпендикулярно оси OX. Записываем второй закон Ньютона для проекций векторов на эти оси:

$$OX: \quad ma = F_x + N_x + mg_x = F\cos 30^0 + 0 + 0 \Rightarrow ma = F\cos 30^0 \;;$$

$$OY: \quad 0 = F_y + N_y + mg_y = F\sin 30^0 + N - mg \Rightarrow 0 = F\sin 30^0 + N - mg$$

Из первого уравнения находим величину вектора ускорения:

$$a = \frac{F\cos 30^0}{m} = \frac{10\cos 30^0}{2} = 4.33\ м/с^2 .$$

Из второго уравнения находим величину вектора силы, с которой горизонтальная поверхность действует на тело:

$$N = mg - F\sin 30^0 = 2\cdot 10 - 10\sin 30^0 = 15\ Н .$$

По третьему закону Ньютона сила, с которой тело действует на горизонтальную поверхность, численно равна силе, с которой горизонтальная поверхность действует на тело, т.е. $N' = N$. Направление векторов этих сил противоположно.

Ответ: $a = 4.33\ м/с^2$, $N' = 15\ Н$.

Пример 2.3 Ракета поднялась на высоту $h = 990\ км$. На сколько уменьшилась сила тяжести, действующая на ракету на заданной высоте, по сравнению с силой тяжести, действующей на нее на поверхности Земли? Масса ракеты на поверхности Земли равна $m = 500\ кг$. Изменением массы ракеты при полете пренебречь.

Решение:

Запишем формулу для вычисления силы тяжести ракеты на заданной высоте:

$$F_1 = G\frac{mM}{(R+h)^2} .$$

Запишем формулу для вычисления силы тяжести ракеты на поверхности Земли в следующем виде:

$$F_2 = mg .$$

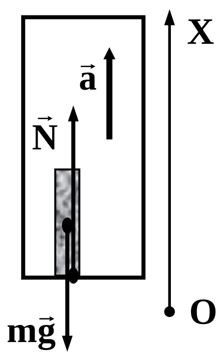
Найдем изменение силы тяжести, действующей на ракету, по формуле

$$\Delta F = F_2 - F_1 = mg - G\frac{mM}{(R+h)^2} = 500\cdot 9{,}81 - 6{,}67\cdot 10^{-11}\cdot\frac{500\cdot 5{,}98\cdot 10^{24}}{(6{,}4\cdot 10^6 + 0{,}99\cdot 10^6)^2} = 1250\ Н .$$

Ответ: $\Delta F = 1250\ Н$.

Пример 2.4 Определить вес мальчика массой $m = 50\ кг$ в лифте, движущемся вертикально вверх с ускорением $a = 2\ м/с^2$. Во сколько раз вес мальчика отличается от силы тяжести?

Решение:



На мальчика в лифте действуют два тела: а) Земля с силой тяжести $m\vec{g}$; б) пол лифта с силой реакции $\vec{N}$. Изобразим эти силы на рисунке. Покажем на этом рисунке направление вектора ускорения лифта. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g} .$$

В качестве инерциальной системы отсчета выбираем поверхность Земли, ось ОХ направим по вектору ускорения лифта. Запишем второй закон Ньютона в проекции на эту ось:

$$ma_x = N_x + mg_x \;\Rightarrow\; a_x = a,\quad N_x = N,\quad g_x = -g \;\Rightarrow ma = N - mg$$

Из данного уравнения находим величину силы реакции:

$$N = mg + ma .$$

Подставляя цифровые данные в системе СИ, находим силу реакции:

$$N = 50\cdot 9{,}81 + 50\cdot 2 = 591\ Н .$$

По определению, вес численно равен силе реакции, т.е. $N' = N = 591H$.

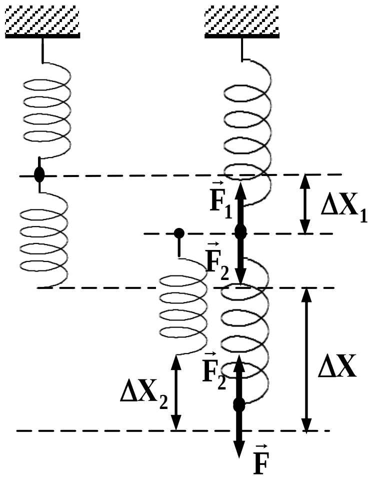
Найдем, во сколько раз отличается вес от силы тяжести мальчика:

$$\frac{N'}{mg} = \frac{591}{50 \cdot 9{,}81} = 1{,}2.$$

Ответ: $N' = 591H$, вес мальчика больше его силы тяжести в 1,2 раза.

Пример 2.5 Жесткость одной пружины равна k_1, а другой k_2. Какова жесткость пружины k, составленной из этих пружин, соединенных последовательно?

Решение



На рисунке слева изображены две пружины, соединенные последовательно. Под действием силы $\vec{F}$ пружины удлиняются. При этом общее удлинение последовательно соединенных пружин ΔX равно сумме удлинений каждой пружины, т.е.:

$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2. \qquad (1)$$

В положении равновесия, т.е. когда пружины находятся в состоянии покоя, величина силы $\vec{F}$ равна величине силы $\vec{F}_2$, т.е. $|\vec{F}| = |\vec{F}_2|$. Точка, в которой соединяются пружины, также находится в состоянии покоя. Исходя из первого закона Ньютона, имеем равенство $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_1|$. Запишем закон Гука для рассматриваемых сил:

$$\vec{F} = k\Delta X, \qquad \vec{F}_1 = k_1 \Delta X_1, \qquad \vec{F}_2 = k_2 \Delta X_2.$$

Из последних равенств находим величины деформаций ΔX, ΔX_1 и ΔX_2, и, подставив в равенство (1), получим равенство:

$$\frac{F}{k} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}.$$

Учтем, что величины всех сил, входящих в последнее соотношение одинаковы. Разделив обе части полученного равенства, получим окончательное соотношение для вычисления общего коэффициента жесткости последовательно соединенных пружин: $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$.

Ответ: $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$.

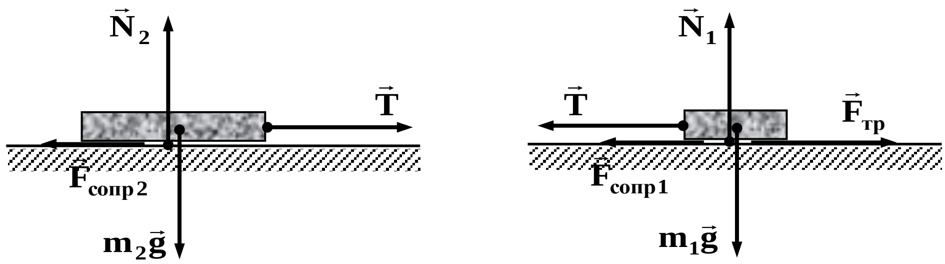
Пример 2.6 Состав какой массы может привести в движение электровоз массой $m_1 = 180\,т$, если коэффициент трения скольжения колес о рельсы равен $\mu_1 = 0,2$, а коэффициент сопротивления качению поезда равен $\mu_2 = 0,006$? *Коэффициент сопротивления качению учитывает все виды трения (колес о дорогу, в осях и т.д.) и показывает, какую часть от силы нормального давления составляет сила сопротивления.*

Решение:

Изобразим отдельно силы, действующие на поезд и на состав массой m_2. На поезд действуют следующие силы: $m_1\vec{g}$ - сила тяжести; $\vec{N}_1$ - сила реакции; $\vec{F}_{тр}$ - сила трения на ведущих колесах поезда (направлена по движению поезда); $\vec{F}_{сопр1}$ - сила сопротивления движению поезда (направлена против движения поезда); $\vec{T}$ - сила упругости пружин сцепки (направлена против движения поезда). На состав действуют следующие силы: $m_2\vec{g}$ - сила тяжести; $\vec{N}_2$ - сила реакции; $\vec{F}_{сопр2}$ - сила сопротивления движению состава (направлена против движения поезда); $\vec{T}$ - сила упругости пружин сцепки (направлена по движению поезда). Выберем прямоугольную декартову систему координат, причем ось OX направим по движению поезда, а ось OY — вертикально вверх. Будем считать, что поезд медленно набирает скорость, т.е. его ускорение является бесконечно малой величиной. С учетом этого предположения запишем в векторном виде первый закон Ньютона отдельно для поезда и состава:

для поезда: $\vec{F}_{тр} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g} + \vec{F}_{сопр1} + \vec{T} = 0$;

для состава: $\vec{N}_2 + m_2\vec{g} + \vec{F}_{сопр2} + \vec{T} = 0$.



Воспользовавшись основным свойством векторных равенств, запишем первый закон Ньютона для поезда в проекциях на оси OX и OY, получим равенства

$$OX: \quad F_{тр} - F_{сопр1} - T = 0; \tag{1}$$

$$OY: \quad N_1 - m_1 g = 0. \tag{2}$$

Из определения силы трения и силы сопротивления качению поезда имеем равенства

$$F_{тр} = \mu_1 N_1; \tag{3}$$

$$F_{сопр1} = \mu_2 N_1. \tag{4}$$

Аналогичные рассуждения для первого закона Ньютона, записанного для состава, дают следующие уравнения:

$$OX: \quad T - F_{сопр2} = 0; \tag{5}$$

$$OY: \quad N_2 - m_2 g = 0; \tag{6}$$

$$F_{сопр2} = \mu_2 N_2. \tag{7}$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции и подставляем в равенства (3) и (4), получим следующие соотношения:

$$F_{тр} = \mu_1 m_1 g; \tag{8}$$

$$F_{сопр1} = \mu_2 m_1 g. \tag{9}$$

Подставим вместо $F_{тр}$ и $F_{сопр}$ правые части найденных соотношений в равенство (1), будем иметь следующее уравнение

$$\mu_1 m_1 g - \mu_2 m_1 g - T = 0\,. \qquad (10)$$

Из равенства (6) находим величину силы реакции N_2 и подставляем в равенство (7). Затем из равенства (7) находим величину силы трения и подставляем в равенство (5), получим уравнение:

$$T - \mu_2 m_2 g = 0\,. \qquad (11)$$

Из данного уравнения находим величину силы упругости сцепки T и подставляем в равенство (10), получим уравнение для определения массы состава:

$$\mu_1 m_1 g - \mu_2 m_1 g - \mu_2 m_2 g = 0\,.$$

Отсюда выражаем массу состава m_2:

$$m_2 = \frac{\mu_1 m_1 g - \mu_2 m_1 g}{\mu_2 g} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right) m_1\,.$$

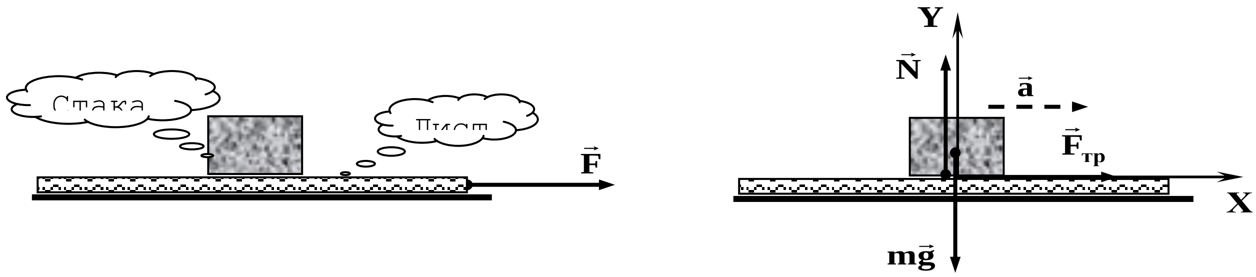
Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, найдем величину массы состава: $m_2 = \left(\dfrac{0,2}{0,006} - 1\right) \cdot 180 \cdot 10^3 = 5820 \cdot 10^3$ *кг*.

Ответ: $m_2 = 5820 \cdot 10^3$ *кг*.

Пример 2.7 На лист бумаги помещен стакан. С каким ускорением надо привести в движение лист, чтобы выдернуть его из-под стакана, если коэффициент трения между стаканом и листом бумаги равен 0,3?

Решение:

Предположим, что при некоторой силе $\vec{F}$, действующей на лист бумаги, стакан движется совместно с листом. Изобразим отдельно силы, действующие на стакан массой m.



На стакан действуют следующие тела: Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, лист бумаги с силой реакции $\vec{N}$, лист бумаги с силой трения $\vec{F}_{тр}$, направленной по скорости движения стакана. Движение стакана является равноускоренным, следовательно, вектор ускорения направлен по скорости движения стакана. Изобразим вектор ускорения стакана $\vec{a}$ на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для сил, действующих на стакан:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{тр} + m\vec{g} + \vec{N}$$

Направим ось OX по вектору ускорения стакана, а ось OY — вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси координат, получим следующие уравнения:

$$OX: \quad ma = F_{тр}\,; \qquad (1)$$

$$OY: \quad 0 = N - mg\,. \qquad (2)$$

При увеличении силы $\vec{F}$, действующей на лист бумаги, возрастает величина силы трения, с которой лист бумаги действует на стакан. При некотором значении силы $\vec{F}$ величина силы трения $\vec{F}_{тр}$ достигает своего максимального значения, равного по величине силе трения скольжения. С этого момента начинается скольжение стакана относительно поверхности бумаги. Предельное значение силы трения связано с силой реакции, действующей на стакан следующим соотношением: $F_{тр} = \mu N$.

Из равенства (2) выражаем величину силы реакции, а затем подставляем в последнее соотношение, имеем $F_{тр} = \mu mg$. Из полученного соотношения находим величину силы трения $F_{тр}$ и поставляем в равенство (1), получим выражение для определения максимального ускорения стакана: $ma = \mu mg \Rightarrow a = \mu g$.

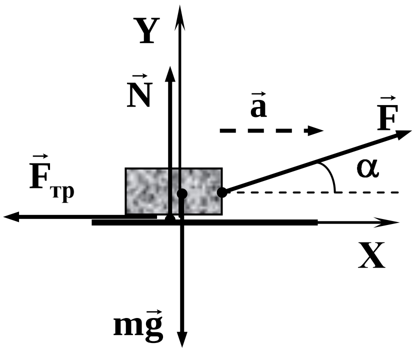
Подставив числовые значения величин в последнее равенство, найдем величину максимального ускорения стакана: $a = 0.3 \cdot 10 = 3\frac{м}{с^2}$.

Полученная величина ускорения стакана равна минимальному ускорению листа бумаги, при котором его можно «выдернуть» из-под стакана.

Ответ: $a \geq 3\ \ м/с^2$.

Пример 2.8 На тело массой $m = 20\,кг$ приложена сила $F = 200\,Н$ под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту (см. рис.). Коэффициент трения между телом и горизонтальной поверхностью равен $\mu = 0,2$. Определить величину ускорения груза.

Решение:



Изобразим все силы, действующие на тело. Кроме внешней силы $\vec{F}$ на тело действует Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, горизонтальная поверхность с силой реакции $\vec{N}$ и силой трения $\vec{F}_{тр}$, направленной против скорости движения тела. Тело движется равноускоренно, и, следовательно, вектор его ускорения направлен по скорости движения. Изобразим вектор $\vec{a}$ на рисунке. Выбираем систему координат так, как показано на рисунке. Записываем второй закон Ньютона в векторной форме: $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g}$.

Используя основное свойство векторных равенств, запишем уравнения для проекций векторов, входящих в последнее векторное равенство:

$$OX:\quad ma = F\cos\alpha - F_{тр}; \qquad (1)$$

$$OY:\quad 0 = N + F\sin\alpha - mg. \qquad (2)$$

Записываем соотношение для силы трения скольжения

$$F_{тр} = \mu N. \qquad (3)$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции

$$N = mg - F\sin\alpha.$$

Из полученного выражения подставим в равенство (3) вместо величины силы реакции **N**, получим выражение $F_{тр} = \mu\ \ mg - F\sin\alpha\ \ $.

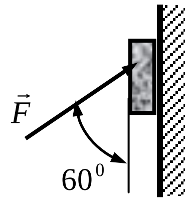
Подставив полученное выражение для силы трения в равенство (1), будем иметь формулу для вычисления ускорения тела:

$$ma = F\cos\alpha - \mu\ \ mg - F\sin\alpha\ \ \Rightarrow a = \frac{F\cos\alpha - \mu\ \ mg - F\sin\alpha}{m}.$$

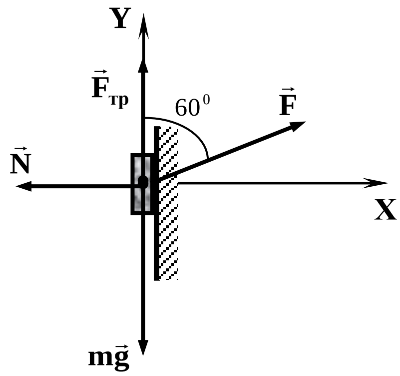
В последнюю формулу подставим числовые данные в системе СИ, найдем величину ускорения движения груза: $a = \frac{200 \cdot \cos 30^0 - 0,2 \cdot\ \ 20 \cdot 9,8 - 200 \cdot \sin 30^0}{20} = 7.7\ м/с^2$

Ответ: $a = 7.7\ м/с^2$.

Пример 2.9 К вертикальной стене прижимают брусок массой m*=3 кг* с силой $\vec{F}$ так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между стеной и бруском равен *0,2*. Каково должно быть минимальное значение силы $\vec{F}$, чтобы брусок оставался в покое?



Решение:



Для минимальной величины силы $\vec{F}$ определим направление силы трения, которая действует на покоящийся брусок. Представим, что сила $\vec{F}$ меньше той минимальной силы, достаточной для того, чтобы тело оставалось в покое. В этом случае тело будет двигаться вниз, и, сила трения $\vec{F}_{тр}$, приложенная к нему, будет направлена вертикально вверх. Для того чтобы остановить тело, нужно увеличить величину приложенной силы $\vec{F}$. Кроме того, на данное тело действует Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, направленной вертикально вниз, а также стенка с силой реакции $\vec{N}$, направленной горизонтально влево. Изобразим на рисунке все силы, действующие на тело. Возьмем прямоугольную декартову систему координат, оси которой направим так, как показано на рисунке.

Для покоящегося тела запишем первый закон Ньютона в векторной форме:

$$\vec{F}+\vec{F}_{тр}+m\vec{g}+\vec{N}=0\,.$$

Для найденного векторного равенства запишем равенства для проекций векторов на оси координат, получим следующие уравнения:

$$OX:\quad F\sin 60^0-N=0\,; \tag{1}$$

$$OY:\quad F\cos 60^0+F_{тр}-mg=0\,. \tag{2}$$

При минимальном значении внешней силы $\vec{F}$ величина силы трения покоя достигает максимального значения, равного величине силы трения скольжения, т.е.:

$$F_{тр}=\mu\cdot N\,. \tag{3}$$

Из равенства (1) находим величину силы реакции N, и подставляем в равенство (3), получим следующее выражение для силы трения:

$$F_{тр}=\mu F\sin 60^0\,.$$

Подставим вместо силы трения в равенство (2) правую часть данного соотношения, получим формулу для вычисления величины приложенной силы F:

$$F\cos 60^0+\mu F\sin 60^0-mg=0\Rightarrow F=\frac{mg}{\cos 60^0+\mu\sin 60^0}$$

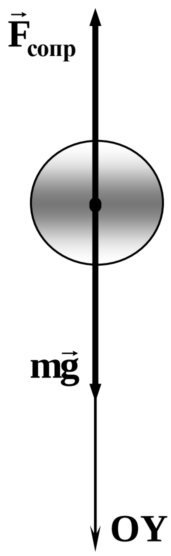
Из последней формулы находим величину силы F:

$$F=\frac{3\cdot 9{,}8}{\cos 60^0+0{,}2\cdot\sin 60^0}\approx 43.7\ H\,.$$

Ответ: $F_{\min}\approx 43.7\ H$.

Пример 2.10 Два шарика падают в воздухе. Шарики (сплошные) сделаны из одного материала, но диаметр одного из шариков вдвое больше, чем другого. В каком соотношении будут находиться скорости шариков при установившемся (равномерном) движении? *Считать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна площади поперечного сечения движущегося тела и квадратично зависит от скорости движения тела.*

Решение:



Изобразим все силы, действующие на шарик, движущийся в воздухе вертикально вниз. На него действует Земля с силой тяжести $m\vec{g}$ и воздух с силой сопротивления $\vec{F}_{сопр}$. Изобразим рассмотренные силы на рисунке. В начальный момент времени равнодействующая всех сил $m\vec{g}+\vec{F}_{сопр}$ имеет максимальное значение, так как скорость шарика равна нулю и сила сопротивления также равна нулю. В этот момент шарик имеет максимальное ускорение, равное $\vec{g}$. По мере движения шарика скорость его движения увеличивается, и, следовательно, сила сопротивления воздуха возрастает. В некоторый момент времени сила сопротивления достигает величины, равной величине силы тяжести. С этого момента времени шарик движется равномерно. Запишем первый закон Ньютона в векторной форме для равномерного движения шарика:

$$m\vec{g}+\vec{F}_{сопр}=0.$$

Направим ось OY вертикально вниз. Запишем для данного векторного равенства равенство для проекций векторов на ось OY:

$$OY:\quad mg-F_{сопр}=0. \tag{1}$$

Сила сопротивления зависит от площади поперечного сечения шарика S и величины его скорости движения v следующим образом:

$$F_{сопр}=\alpha S v^2, \tag{2}$$

где α - коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом сопротивления.

Из равенств (1) и (2) вытекает следующее соотношение:

$$\alpha S v^2 = mg. \tag{3}$$

Выразим массу шарика через его плотность и объем, а объем в свою очередь, — через радиус шарика:

$$m=\rho V_{шара}=\rho\frac{4}{3}\pi R^3. \tag{4}$$

Из данного выражения находим массу m и подставляем в равенство (3), получим следующее равенство:

$$\alpha S v^2=\rho\frac{4}{3}\pi R^3. \tag{5}$$

Выражаем площадь поперечного сечения шарика через его радиус:

$$S=\pi R^2. \tag{6}$$

С учетом соотношения (6) равенство (5) примет следующий вид:

$$\alpha\pi R^2 v^2=\rho\frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow \alpha v^2=\rho\frac{4}{3}R \Rightarrow v^2=\frac{\rho\frac{4}{3}R}{\alpha} \quad\Rightarrow\quad v=\sqrt{\frac{\rho 4R}{3\alpha}}.$$

Обозначим R_1- как радиус первого шарика; R_2- как радиус второго шарика. Запишем формулы для скоростей установившегося движения первого и второго шариков:

$$V_1=\sqrt{\frac{\rho 4R_1}{3\alpha}};\qquad V_2=\sqrt{\frac{\rho 4R_2}{3\alpha}}$$

Из полученных равенств находим отношение скоростей движения шариков:

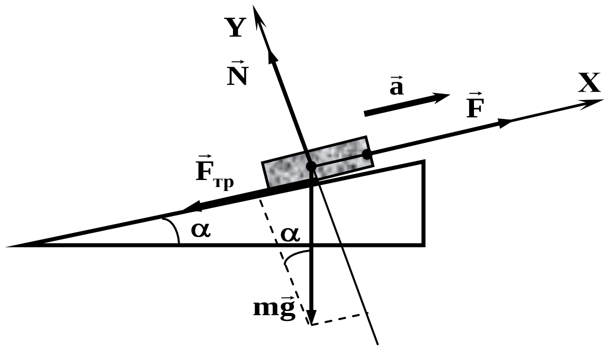
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{\sqrt{\dfrac{\rho 4R_1}{3\alpha}}}{\sqrt{\dfrac{\rho 4R_2}{3\alpha}}}=\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}\,.$$

Из условия задачи отношение радиусов шариков равно двум. Используя это условие, находим отношение скоростей: $\dfrac{V_1}{V_2}=\sqrt{2}=1,41$.

Ответ: $\dfrac{V_1}{V_2}=1,41$.

Пример 2.11 На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30^0$ находится тело массой $m=3\,кг$. Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен $\mu=0,3$. К телу прикладывают силу, направленную вверх вдоль наклонной плоскости. Какова должна быть величина этой силы, чтобы тело двигалось вверх по наклонной плоскости с ускорением $a=1\,м/с^2$?

Решение:



На тело, движущееся вверх вдоль наклонной плоскости, действуют внешние тела: а) Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, направленной вертикально вниз; б) наклонная плоскость с силой реакции $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости; в) наклонная плоскость с силой трения $\vec{F}_{тр}$, направленной против движения тела; г) внешнее тело с силой $\vec{F}$, направленной вверх вдоль наклонной плоскости. Под действием этих сил тело движется равноускоренно вверх по наклонной плоскости, и, следовательно, вектор ускорения направлен по перемещению тела. Изобразим вектор ускорения $\vec{a}$ на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a}=\vec{F}+\vec{F}_{тр}+m\vec{g}+\vec{N}\,.$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по ускорению движения тела, а ось OY — перпендикулярно наклонной плоскости. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси координат, получим следующие уравнения:

$$OX:\quad ma=F-F_{тр}-mg\sin\alpha\,; \tag{1}$$

$$OY:\quad 0=N-mg\cos\alpha\,. \tag{2}$$

Сила трения скольжения связана с силой реакции следующим соотношением:

$$F_{тр}=\mu N\,. \tag{3}$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции N и подставляем в равенство (3), имеем следующее выражение для силы трения:

$$F_{тр}=\mu mg\cos\alpha\,. \tag{4}$$

Подставим в равенство (1) вместо силы трения правую часть равенства (4), получим следующее уравнение для вычисления величины искомой силы:

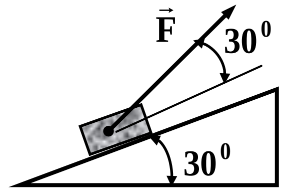
$$ma=F-\mu mg\cos\alpha-mg\sin\alpha \Rightarrow F=ma+\mu mg\cos\alpha+mg\sin\alpha$$

Вычислим величину силы F:

$$F=3\cdot 1+0,3\cdot 3\cdot 9,8\cdot\cos 30^0+3\cdot 9,8\cdot\sin 30^0=25,3\,H\,.$$

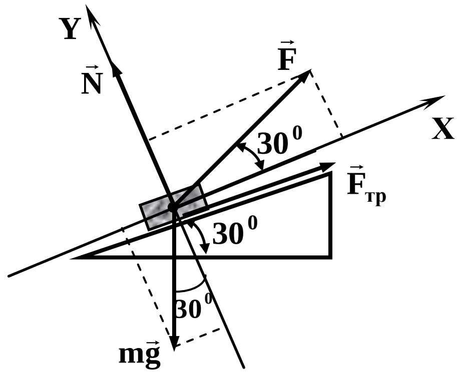
Ответ: $F=25.3\,H$.

Пример 2.12 На наклонной плоскости с углом наклона 30^0 находится тело массой 3 кг. Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью равен 0,3. К телу прикладывают силу так, как показано на рисунке. Какова должна быть минимальная величина этой силы, чтобы тело удержать на наклонной плоскости?



Решение:

Определим вначале направление силы трения, действующей на рассматриваемое тело. Предположим, что внешняя сила $\vec{F}$ отсутствует. В этом случае тело будет двигаться вниз вдоль наклонной плоскости, а сила трения скольжения, действующая на это тело, будет направлена вверх вдоль наклонной плоскости. Для удержания тела на наклонной плоскости мы прикладываем минимальную силу так, как показано на рисунке. При этом сила трения покоя достигает максимального значения, равного силе трения скольжения. Изобразим все силы, действующие на тело, на рисунке. Запишем в векторной форме первый закон Ньютона для тела, покоящегося на наклонной плоскости:



$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} = 0 .$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рисунке. Запишем первый закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$OX: \quad F\cos 30^0 + F_{тр} - mg\sin 30^0 = 0 , \tag{1}$$

$$OY: \quad F\sin 30^0 + N - mg\cos 30^0 = 0 . \tag{2}$$

Из последнего равенства находим величину силы реакции N, и подставляем в выражение для максимального значения силы трения покоя $F_{тр} = \mu N$, получим выражение для $F_{тр}$:

$$F_{тр} = \mu\left(mg\cos 30^0 - F\sin 30^0\right) . \tag{3}$$

Подставим в равенство (1) вместо силы трения правую часть равенства (3), будем иметь уравнение для величины внешней силы $\boldsymbol{F}$:

$$F\cos 30^0 + \mu\left(mg\cos 30^0 - F\sin 30^0\right) - mg\sin 30^0 = 0 .$$

Решив данное уравнение, получим формулу для вычисления величины силы $\boldsymbol{F}$:

$$F\cos 30^0 + \mu mg\cos 30^0 - \mu F\sin 30^0 - mg\sin 30^0 = 0 \Rightarrow F\left(\cos 30^0 - \mu F\sin 30^0\right) = mg\sin 30^0 - \mu mg\cos 30^0$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg\sin 30^0 - \mu mg\cos 30^0}{\cos 30^0 - \mu\sin 30^0} .$$

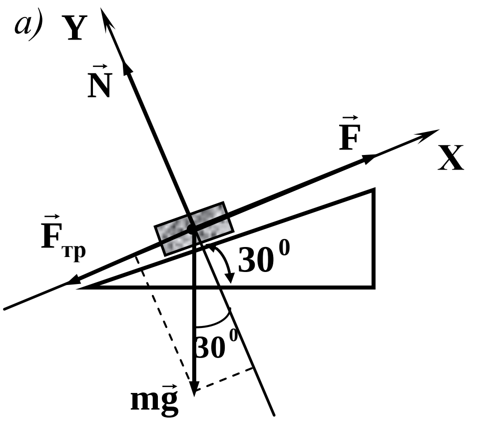
Подставив цифровые значения величин, входящих в последнее соотношение, найдем величину силы: $$F = \frac{3\cdot 9,8\cdot\sin 30^0 - 0,3\cdot 3\cdot 9,8\cdot\cos 30^0}{\cos 30^0 - 0,3\cdot\sin 30^0} \approx 9,86\ H .$$

Ответ: $F \approx 9.86\ H$.

Пример 2.13 На наклонной плоскости лежит тело массой $m = 20\ кг$. Угол наклона плоскости к горизонту такой, что при его незначительном увеличении тело начинает соскальзывать. Величина этого угла равна 30^0. Какую силу F, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, нужно приложить к телу, чтобы оно начало равномерно подниматься вверх по наклонной плоскости?

Решение:

На движущееся вверх по наклонной плоскости тело действуют внешние тела: Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, направленной вертикально вниз; наклонная плоскость с силой реакции $\vec{N}$, направленной перпендикулярно наклонной плоскости; наклонная плоскость с силой трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, направленной вниз вдоль ее поверхности; внешнее тело с силой $\vec{F}$, направленной вверх вдоль наклонной плоскости. Изобразим эти силы на рисунке (рис., а).



Под действием этих сил тело движется вверх вдоль наклонной плоскости равномерно, поэтому сумма всех сил, действующих на него равна нулю, т.е.:

$$\vec{F} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} = 0\,.$$

Возьмем прямоугольную декартову систему координат, ось ОХ которой направим по вектору силы $\vec{F}$, а ось OY — вдоль силы реакции $\vec{N}$. Спроектировав предыдущее векторное равенство на эти оси, получим следующие уравнения:

$$OX: \quad F - F_{тр} - mg\sin 30^0 = 0\,, \qquad (1)$$

$$OY: \quad N - mg\cos 30^0 = 0\,. \qquad (2)$$

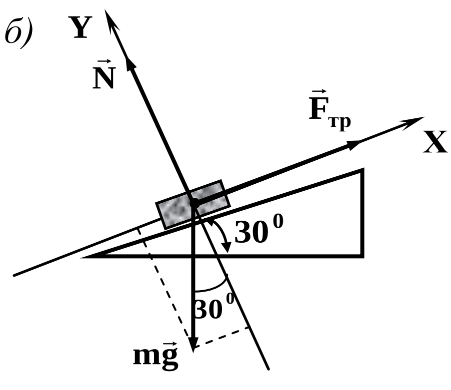
Кроме того, для силы трения скольжения имеем следующее равенство:

$$F_{тр} = \mu N\,. \qquad (3)$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции N и подставляем в равенство (3), получим выражение для силы трения: $F_{тр} = \mu mg\cos 30^0$. (4)

Подставив из равенства (4) выражение для силы трения в равенство (1), получим следующее соотношение: $F = \mu mg\cos 30^0 + mg\sin 30^0$. (5)

В данном выражении остается неизвестным значение коэффициента трения μ. Выразим величину данного коэффициента через предельное значение угла наклона α. Рассмотрим равномерное скольжение тела вниз вдоль наклонной плоскости в отсутствие внешней силы. Изобразим все силы, действующие на него (рис. б).



Запишем первый закон Ньютона в проекциях на оси координат, получим следующие уравнения:

$$OX: \quad F_{тр} - mg\sin 30^0 = 0\,; \qquad (6)$$

$$OY: \quad N - mg\cos 30^0 = 0\,. \qquad (7)$$

Из равенства (7) находим величину силы реакции N и подставляя в выражение для силы трения $F_{тр} = \mu N$, получим выражение

$$F_{тр} = \mu mg\cos 30^0\,. \qquad (8)$$

Подставим выражение для силы трения из равенства (8) в равенство (6), получим уравнение для нахождения коэффициента трения:

$$\mu mg\cos 30^0 - mg\sin 30^0 = 0\,.$$

Решив данное уравнение, будем иметь следующее соотношение:

$$\mu = tg\,30^0. \qquad (9)$$

Учитывая соотношение (9) для коэффициента трения, перепишем равенство (5) в следующем виде:

$$F = mg\,tg30^0\cos 30^0 + mg\sin 30^0 = 2mg\sin 30^0.$$

Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, получим величину силы: $F = 2\cdot 20\cdot 9{,}8\cdot \sin 30^0 = 196\ H$.

Ответ: $F = 196\ H$.

Пример 2.14 Какой период обращения имел бы искусственный спутник Земли, удаленный от ее поверхности на расстояние, равное радиусу Земли?

Решение:

Для решения данной задачи воспользуемся формулой для первой космической скорости спутника, вращающегося равномерно по круговой орбите и удаленного от поверхности Земли на расстояние h:

$$v = \sqrt{G\frac{M_З}{R_З + h}}.$$

Из условия задачи следует, что высота, на которой находится спутник, равна радиусу Земли, т.е. $h = R_З$. С учетом этого условия предыдущее равенство примет вид:

$$v = \sqrt{G\frac{M_З}{2R_З}}.$$

Линейная скорость спутника связана с периодом его вращения соотношением $v = \frac{2\pi}{T}R$, где R- радиус вращения спутника. В данной задаче $R = R_З + h = 2R_З$. Учитывая записанные соотношения, получим формулу для вычисления периода вращения спутника:

$$\frac{2\pi}{T}2R_З = \sqrt{G\frac{M_З}{2R_З}} \Rightarrow T = \frac{4\pi R_З}{\sqrt{G\frac{M_З}{2R_З}}} = \frac{4\pi R_З\sqrt{2R_З}}{\sqrt{GM_З}}.$$

Подставив в последнюю формулу массу Земли и ее радиус, получим период вращения спутника:

$$T = \frac{4\cdot\pi\cdot 6{,}37\cdot 10^6\cdot\sqrt{2\cdot 6{,}37\cdot 10^6}}{\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}G\cdot 5{,}96\cdot 10^{24}}} = 1{,}433\cdot 10^4\ с = 4\ ч.$$

Ответ: $T = 1{,}433\cdot 10^4\ с = 4\ ч$.

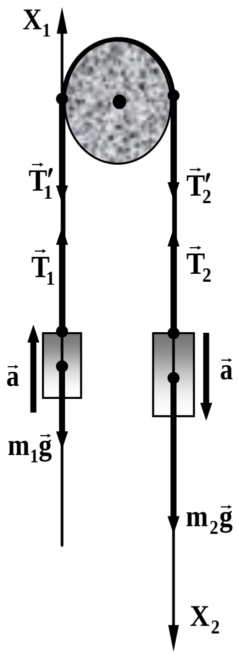
Пример 2.15 Через легкий вращающийся без трения блок перекинута нить. На одном конце нити находится тело массой $m_1 = 1\,кг$, на другом — тело массой $m_2 = 2\,кг$. Определить величину силы натяжения нити и величину ускорения тел.

Решение:

Изобразим все силы, действующие на тела и на блок. Рассмотрим процесс движения тел, связанных нитью, перекинутой через блок. Нить является невесомой и нерастяжимой, следовательно, величина силы натяжения на любом участке нити будет одинаковой, т.е.

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_1'\right| \text{ и } \left|\vec{T}_2\right| = \left|\vec{T}_2'\right|.$$

Перемещения тел за любые промежутки времени будут одинаковыми, и, следовательно, в любой момент времени одинаковыми будут величины скоростей и ускорений этих тел. Из того, что блок вращается без трения и является невесомым, следует, что сила натяжения нити по обе стороны блока будет одинаковой, т.е.:



$$\left|\vec{T}_1'\right| = \left|\vec{T}_2'\right| .$$

Отсюда вытекает равенство сил натяжения нити, действующей на первое и второе тело, т.е. $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right|$. Изобразим на рисунке векторы ускорений первого и второго тела. Изобразим две оси OX. Первую ось направим вдоль вектора ускорения первого тела, вторую — вдоль вектора ускорения второго тела. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на эти оси координат:

$$OX_1: \qquad T_1 - m_1 g = m_1 a ; \qquad (1)$$

$$OX_2: \qquad m_2 g - T_2 = m_2 a . \qquad (2)$$

Учитывая, что $\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right|$, и выразив из первого уравнения T_1, подставим T_1 во второе уравнение, получим

$$m_2 g - \ m_1 g + m_1 a \ = m_2 a \Rightarrow m_1 a + m_2 a = m_2 g - m_1 g \Rightarrow$$

$$m_1 + m_2 \ a = \ m_2 - m_1 \ g \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g .$$

Из последнего равенства находим величину ускорения:

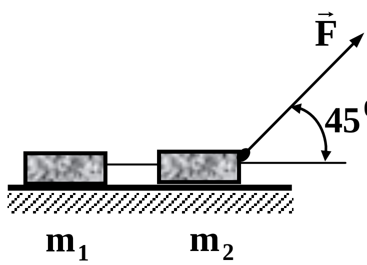
$$a = \frac{2-1}{2+1} \cdot 9.81 = 3,27 \ м/с^2 .$$

Из равенства (1) находим величину силы натяжения:

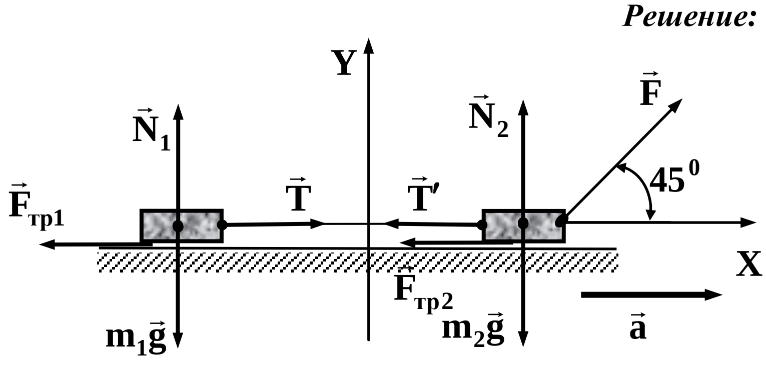
$$T = m_1 \ g + a \ = 1 \cdot \ 9,8 + 3,27 \ \approx 13,1 \, Н .$$

Ответ: $a = 3,27 \ м/с^2$, $T = 13,1 \, Н$.

Пример 2.16 Первое тело имеет массу 1 *кг*, второе тело — 2 *кг*. Ко второму телу, соединенному с первым невесомой и нерастяжимой нитью, приложены сила *F*=20 *Н* так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между первым телом и горизонтальной поверхностью равен 0,2, а между вторым и поверхностью — 0,5. Найти величину ускорения поступательного движения тел.



Решение:



Рассмотрим силы, действующие на первое и второе тело. На первое тело действуют следующие силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_1$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения скольжения $\vec{F}_{тр1}$.

Ко второму телу приложены следующие силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_2$, сила натяжения нити $\vec{T}'$, сила трения скольжения $\vec{F}_{тр2}$ и внешняя сила $\vec{F}$. Направление этих сил показано на рисунке. Нить является невесомой, следовательно, $\left|\vec{T}\right| = \left|\vec{T}'\right|$. Так как тела движутся с увеличением скорости, то вектор ускорения тел направлен по направлению совместного движения. Изобразим вектор ускорения на данном рисунке.

Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для первого и второго тела:

$$m_1\vec{a} = \vec{T} + \vec{F}_{тр1} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g}\ ;$$

$$m_2\vec{a} = \vec{F} + \vec{T}' + \vec{F}_{тр2} + \vec{N}_2 + m_2\vec{g}\ .$$

Возьмем прямоугольную декартову систему координат, ось OX направим по вектору ускорения, ось OY — вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона для первого и второго тела в проекциях на эти оси:

$$OX:\quad m_1 a = T - F_{тр1}\ ; \tag{1}$$

$$OY:\quad N_1 - m_1 g = 0; \tag{2}$$

$$OX:\quad m_2 a = F\cos 45^0 - T - F_{тр2}; \tag{3}$$

$$OY:\quad N_2 + F\sin 45^0 - m_2 g = 0\,. \tag{4}$$

Кроме того, для сил трения скольжения $F_{тр1}$ и $F_{тр2}$ имеем равенства

$$F_{тр1} = \mu_1 N_1; \tag{5}$$

$$F_{тр2} = \mu_2 N_2. \tag{6}$$

Из равенств (2) и (4) выразим силы реакции N_1, N_2:

$$N_1 = m_1 g\ ;$$

$$N_2 = m_2 g - F\sin 45^0.$$

Подставляя из полученных равенств выражения для сил реакций N_1, N_2 в равенства (5) и (6), получим выражения для сил трения:

$$F_{тр1} = \mu_1 m_1 g\ ,$$

$$F_{тр2} = \mu_2\ \ m_2 g - F\sin 45^0\ \ .$$

Учитывая последние выражения, перепишем равенства (1) и (3) в следующем виде

$$m_1 a = T - \mu_1 m_1 g\ ; \tag{7}$$

$$m_2 a = F\cos 45^0 - T - \mu_2\ \ m_2 g - F\sin 45^0\ \ . \tag{8}$$

Сложим левую часть равенства (7) с левой частью равенства (8), а правую часть равенства (7) — с правой частью равенства (8), получим уравнение, из которого находим величину искомого ускорения:

$$m_1 a + m_2 a = \ T - \mu_1 m_1 g\ \ + \left[F\cos 45^0 - T - \mu_2\ \ m_2 g - F\sin 45^0\ \ \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{F\cos 45^0 - \mu_1 m_1 g - \mu_2\ \ m_2 g - F\sin 45^0}{m_1 + m_2}\,.$$

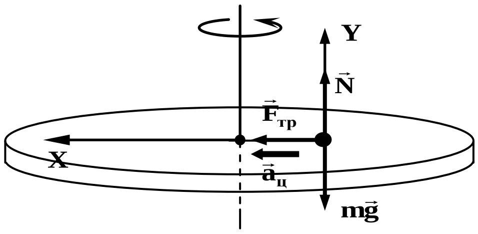
Из последнего соотношения находим величину ускорения:

$$a = \frac{20\cdot\cos 45^0 - 0,2\cdot 1\cdot 9,8 - 0,5\cdot\ \ 2\cdot 9,81 - 20\cdot\sin 45^0}{1+2} \approx 3,15\ м/с^2.$$

Ответ: $a \approx 3,15\ м/с^2$.

Пример 2.17 На каком расстоянии от центра горизонтального диска, вращающегося с частотой $\nu = 2\,c^{-1}$, нужно поместить небольшое тело, чтобы оно не соскальзывало с диска, если коэффициент трения между диском и телом равен $\mu = 0,2$?

Решение:



На тело, вращающееся вместе с диском, действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$, направленная к оси вращения. Изобразим все силы на рисунке. Покажем на данном рисунке направление вектора центростремительного ускорения $\vec{a}_ц$. Записываем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a}_ц = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр}.$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат так, как показано на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на оси координат:

$$OX: \quad ma_ц = F_{тр}; \tag{1}$$

$$OY: \quad 0 = -mg + N. \tag{2}$$

Запишем соотношение для центростремительного ускорения:

$$a_ц = 4\pi^2\nu^2 r. \tag{3}$$

Подставим правую часть равенства (3) вместо центростремительного ускорения в равенство (1), получим:

$$F_{тр} = m4\pi^2\nu^2 r. \tag{4}$$

Из равенства (4) видно, что величина силы трения прямо пропорциональна радиусу вращения r, поэтому при увеличении радиуса вращения сила трения покоя увеличивается, и при некоторой величине r сила трения покоя достигает максимального значения, равного силе трения скольжения ($F_{тр} = \mu N$). С учетом равенства (2), получим выражения для максимальной силы трения покоя:

$$F_{тр} = \mu mg.$$

Подставим правую часть полученного равенства вместо силы трения равенство (4), получим следующее соотношение:

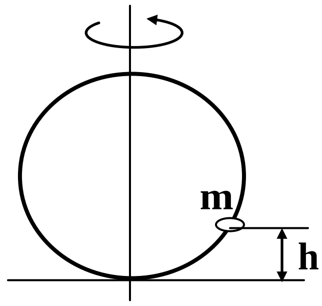
$$\mu mg = m4\pi^2\nu^2 r$$

Из данного уравнения находим предельное значение радиуса вращения:

$$r = \frac{\mu g}{4\pi^2\nu^2} = \frac{0,2\cdot 9,8}{4\pi^2 2^2} = 1,24\cdot 10^{-2}\ м.$$

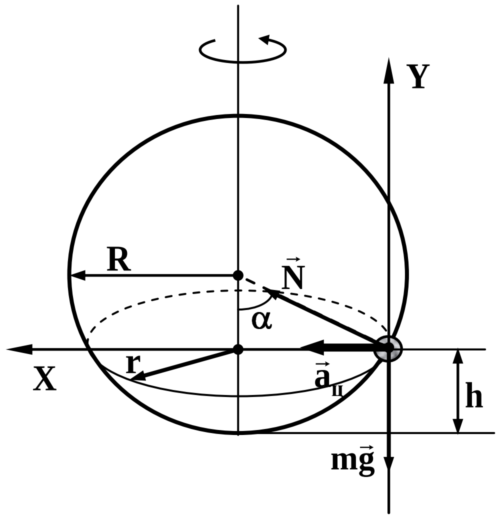
Ответ: $r = 1,24\cdot 10^{-2}\ м$.

Пример 2.18 Маленькое колечко массой $m = 10\ г$ надето на большое проволочное кольцо радиуса $R = 0,5\ м$, расположенное в вертикальной плоскости. Большое кольцо вращается вокруг вертикальной оси с частотой $\nu = 1\ Гц$. Маленькое колечко начинает скользить вниз из верхней точки большого кольца. На какую высоту опустится колечко?



Решение:

На маленькое колечко при его вращении по окружности действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, и сила реакции $\vec{N}$, направленная к центру кольца. Изобразим эти силы на рисунке, а также покажем на нем траекторию движения колечка. Вектор центростремительного ускорения $\vec{a}_ц$ колечка лежит в плоскости траектории и направлен к оси вращения. Изобразим $\vec{a}_ц$ на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме для вращающегося колечка:



$$m\vec{a}_ц = \vec{N} + m\vec{g}.$$

Выберем прямоугольную систему координат, ось OX которой направим по центростремительному ускорению $\vec{a}_ц$, а ось OY — вертикально вверх вдоль оси вращения. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на эти оси координат:

$$OX: \quad ma_ц = N\sin\alpha; \tag{1}$$

$$OY: \quad 0 = N\cos\alpha - mg. \tag{2}$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции N и подставляем в равенство (1), получим выражение:

$$ma_ц = mg\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow a_ц = g\ tg\ \alpha. \tag{3}$$

Центростремительное ускорение связано с частотой вращения соотношением: $a_ц = 4\pi^2\nu^2 r$, где r - радиус вращения маленького колечка. Подставим правую часть последнего равенства вместо $a_ц$ в формулу (3), получим следующее соотношение:

$$4\pi^2\nu^2 r = g\ tg\ \alpha. \tag{4}$$

Из рисунка находим величину тангенса угла альфа $tg\ \alpha = \dfrac{r}{R-h}$. С учетом этого выражения равенство (4) примет вид:

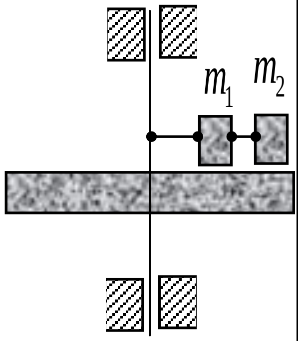
$$4\pi^2\nu^2 r = g\frac{r}{R-h} \Rightarrow 4\pi^2\nu^2 = \frac{g}{R-h}.$$

Из последнего уравнения находим искомую высоту h:

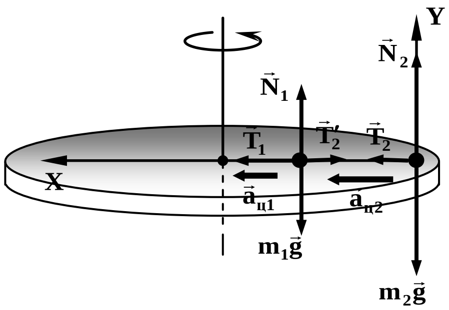
$$h = R - \frac{g}{4\pi^2\nu^2} = 0,5 - \frac{9,81}{4\cdot 3,14^2\cdot 1^2} = 0,252\ м.$$

Ответ: $h = 0,252\ м$.

Пример 2.19 Горизонтальный диск равномерно вращается вокруг вертикальной оси с частотой $\nu = 10\ \mathbf{с^{-1}}$. На поверхности диска находятся грузы массой $\mathbf{m_1 = 3\ кг}$ и $\mathbf{m_2 = 2\ кг}$, удерживаемые двумя нитями. Расстояние от оси вращения до первого груза равно $\mathbf{r_1 = 1\ м}$, а расстояние от оси вращения до второго груза – $\mathbf{r_2 = 1{,}5\ м}$. Во сколько раз сила натяжения нити, удерживающей первый груз, больше силы натяжения нити, удерживающей второго груз? Трением между грузами и диском пренебречь. Размерами тел по сравнению с длиной нитей можно пренебречь.



Решение:



Рассмотрим все силы действующие на первое и второе тело. На первое тело действуют следующие силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила реакции $\vec{N}_1$, направленная вертикально вверх, и две силы натяжения нитей $\vec{T}_1, \vec{T}_2'$. Изобразим вектор силы $\vec{T}_1$ направленным к центру вращения, а вектор силы $\vec{T}_2'$ — от центра вращения. На второе тело действуют три силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, направленная вертикально вниз, сила реакции $\vec{N}_2$, направленная вертикально вверх, и сила натяжения нити $\vec{T}_2$, направленная к центру вращения. Поскольку в данной задаче радиусы вращения тел различны, а частоты их вращения одинаковы, то величины центростремительных ускорений этих тел различны. Векторы ускорений направлены так, как показано на рисунке. Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим вдоль векторов центростремительных ускорений тел, а ось OY — вертикально вверх. Запишем второй закон Ньютона для каждого тела в проекции на ось OX:

$$OX:\quad m_1 a_{ц1} = T_1 - T_2', \tag{1}$$

$$OX:\quad m_2 a_{ц2} = T_2\ . \tag{2}$$

Так как нити невесомые, то $T_2' = T_2$. Из равенства (2) находим силу натяжения второй нити T_2, и подставив в первое равенство, получим:

$$m_1 a_{ц1} = T_1 - m_2 a_{ц2} \Rightarrow T_1 = m_1 a_{ц1} + m_2 a_{ц2}\ . \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) находим отношение сил натяжения нитей:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 a_{ц1} + m_2 a_{ц2}}{m_2 a_{ц2}} = \frac{m_1 a_{ц1}}{m_2 a_{ц2}} + 1\ . \tag{4}$$

Выразим центростремительные ускорения тел через частоту и радиусы вращения и подставим в формулу (4), получим:

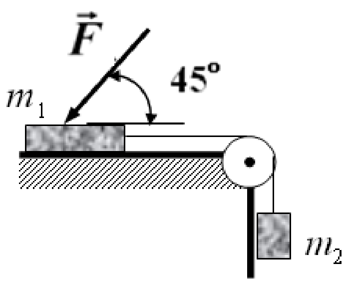
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m_1 4\pi^2 \nu r_1}{m_2 4\pi^2 \nu r_2} + 1 = \frac{m_1 r_1}{m_2 r_2} + 1. \tag{5}$$

Подставив цифровые данные в формулу (5), найдем отношение сил натяжения нитей:

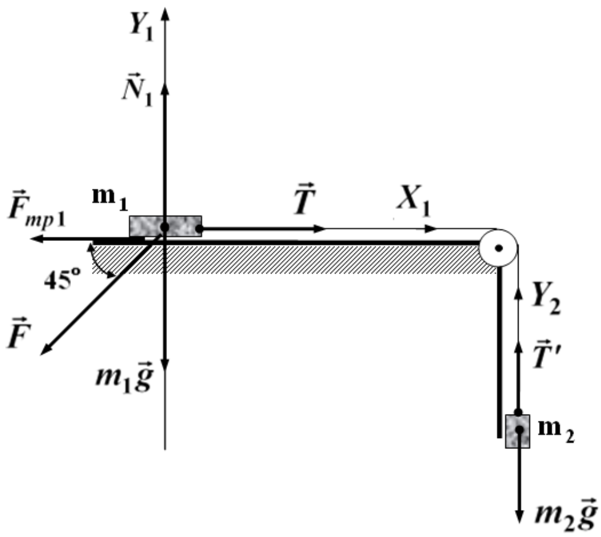
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 1{,}5} + 1 = 2\ .$$

Ответ: $\dfrac{T_1}{T_2} = 2\ .$

Пример 2.20 Два бруска массами $m_1 = 8\,кг$ и $m_2 = 5\,кг$ соединены невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через невесомый блок. К бруску, лежащему на горизонтальной поверхности, прикладывают силу так, как показано на рисунке. Коэффициент трения между бруском массой m_1 и горизонтальной поверхностью равен $\mu = 0,5$. Каково минимальное значение данной силы, при которой бруски остаются в покое?



Решение:



Определим направление силы трения, действующей на первое тело. Используем для этого следующий метод. Предположим, что внешняя сила отсутствует. В этом случае второе тело движется вниз, а первое тело — вправо. При этом сила трения скольжения направлена против движения, т.е. влево. Величины данной силы недостаточно, чтобы удержать первое тело в покое. Для этого мы прикладываем дополнительную силу $\vec{F}$. Причем величина данной силы должна быть такой, чтобы сила трения покоя была направлена влево, и величина этой силы трения покоя достигала максимального значения, равного силе трения скольжения. Для решения данной задачи выберем для каждого тела отдельно прямоугольные декартовы системы координат, оси которых располагаем так, как показано на рисунке. Поскольку под действием изображенных на рисунке сил, тела остаются в покое, записываем для каждого тела первый закон Ньютона в векторном виде:

$$\vec{F} + \vec{T} + \vec{F}_{тр} + \vec{N}_1 + m_1\vec{g} = 0;$$

$$\vec{T}' + m_2\vec{g} = 0.$$

Записывая полученные векторные равенства в проекциях на выбранные оси координат, получим уравнения

$$OX_1: \quad T - F_{тр1} - F\cos 45^0 = 0; \tag{1}$$

$$OY_1: \quad N_1 - m_1 g - F\sin 45^0; \tag{2}$$

$$OY_2: \quad T' - m_2 g = 0. \tag{3}$$

В данной задаче значение приложенной силы F является минимальным, поэтому величина силы трения покоя $F_{тр1}$ равна максимальному значению, равному силе трения скольжения, то есть:

$$F_{тр1} = \mu N_1. \tag{4}$$

Из равенства (2) находим величину силы реакции и, подставляя ее в равенство (4), получаем выражение для силы трения:

$$F_{тр1} = \mu \;\; m_1 g + F\sin 45^0 \;\; . \tag{5}$$

Так как нить является невесомой, то силы натяжения нити $\vec{T}$ и T' одинаковы по величине. Из равенства (3) найдем величину силы натяжения нити T' и, подставив в уравнение (1), получим равенство

$$m_2 g - F_{тр1} - F\cos 45^0 = 0. \tag{6}$$

Подставляя в равенство (6) из равенства (5) выражение для силы трения, получаем следующее уравнение:

$$m_2 g - \mu \quad m_1 g + F\sin 45^0 \quad - F\cos 45^0 = 0 .$$

Из данного уравнения выражаем искомую силу F. В последнюю формулу подставим числовые значения, входящих в нее величин, получим величину силы F:

$$F = \frac{5 - 0{,}5 \cdot 8 \quad \cdot 9{,}8}{\cos 45^0 + 0{,}5 \cdot \sin 45} \approx 27{,}7\ H .$$

Ответ: $F \approx 27{,}7\ H$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 2.1 Материальная точка массой *2* кг движется под действием некоторой силы F согласно уравнению $x = A+Bt+Ct^2+Dt^3$, где С = 1 м/с^2, D = — 0,2 м/с^3. Найти значения этой силы в моменты времени t_1 = *2* с и t_2 = 5 с. В какой момент времени сила равна нулю? ***Ответ:*** $F_1 = -0.8H\ ; F_2 = -8H\ ; t = 1.67\,c$.

Задача 2.2 На столе стоит тележка массой m_1 = 4000 г. К тележке привязан один конец шнура, перекинутого через блок. С каким ускорением а будет двигаться тележка, если к другому концу шнура привязать гирю массой m_2 = 1 кг? ***Ответ:*** $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 1.96\,\frac{м}{c^2}$.

Задача 2.3 К пружинным весам подвешен блок. Через блок перекинут шнур, к концам которого привязали грузы массами 1.5 кг и 3 кг. Каково будет показание весов во время движения грузов?. Массой блока и шнура пренебречь. ***Ответ:*** $F = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g = 39.2\,H$.

Задача 2.4 На гладком столе лежит брусок массой 4 кг. К бруску привязан шнур, ко второму концу которого приложена сила 10 Н, направленная параллельно поверхности стола. Найти ускорение бруска. ***Ответ:*** $a = 2.5\,\frac{м}{c^2}$.

Задача 2.5 Наклонная плоскость, образующая угол $\alpha = 25°$ с плоскостью горизонта, имеет длину l = *2* м. Тело, двигаясь равноускоренно, соскользнуло с этой плоскости за время 2 с. Определить коэффициент трения тела о плоскость. ***Ответ:*** $\mu = tg\alpha - \frac{2l}{gt^2\cos\alpha} = 0.35$ **.**

Задача 2.6 Грузик, привязанный к шнуру длиной 50 см, описывает окружность в горизонтальной плоскости. Какой угол образует шнур с вертикалью, если частота вращения равна один оборот в секунду? ***Ответ:*** $\alpha = arccos\,\frac{g}{4\pi^2 n^2 l} = 60^\circ$ **.**

Задача 2.7 Шайба, пущенная по поверхности льда с начальной скоростью v_0=20 м/с, остановилась через t=40 с. Найти коэффициент трения μ шайбы о лед. ***Ответ:*** $\mu = 0.05$.

Задача 2.8 Диск радиусом R = 40 см вращается вокруг вертикальной оси. На краю диска лежит кубик. Принимая коэффициент трения 0,4, найти частоту n вращения, при которой кубик соскользнет с диска. ***Ответ:*** $n = 0.5\,\frac{об}{c}$.

Задача 2.9 Период обращения искусственного спутника Земли равен 2 ч. Считая орбиту спутника круговой, найти, на какой высоте над поверхностью Земли движется спутник. ***Ответ:*** $h = 1690\ км$.

Задача 2.10 Самолет описывает петлю Нестерова радиусом R = 200 м. Во сколько раз сила F, с которой летчик давит на сиденье в нижней точке, больше силы тяжести летчика, если скорость самолета 100 м/с? ***Ответ:*** $\frac{F}{mg} = 6$.