3. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

§ 3.1 Импульс. Закон изменения импульса материальной точки

В физике главную роль играют такие величины, как импульс, механическая энергия тел. Известно, что эти величины при определенных условиях не изменяются со временем. Эти условия формулируют в виде законов сохранения импульса и механической энергии. Ведем понятие импульса материальной точки. Пусть материальная точка массой m имеет в некоторый момент времени скорость $\vec{V}$, тогда ***импульсом материальной точки*** *называется величина, равная произведению массы этой точки на вектор ее скорости:*

$$\vec{P} = m\vec{V}\ . \tag{3.1}$$

Вектор импульса $\vec{P}$ всегда направлен по вектору скорости движения точки, так как при умножении вектора скорости $\vec{V}$ на положительное число m получается вектор $\vec{P}$, сонаправленный с вектором скорости.

Единица измерения импульса в системе СИ — $\dfrac{кг \cdot м}{с} \equiv Н \cdot с$.

Введем понятие импульса системы материальных точек. Пусть дана система, состоящая из n материальных точек, массы которых соответственно равны $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Обозначим векторы скоростей этих точек через $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$.

Импульс системы материальных точек *равен векторной сумме импульсов каждой материальной точки*, т.е.:

$$\vec{P}_{системы} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 + \ldots + m_n\vec{V}_n\ . \tag{3.2}$$

Используя данное определение, можно показать, что импульс системы материальных точек равен произведению массы всех материальных точек на скорость их центра масс, т.е.:

$$\vec{P}_{системы} = m\vec{V}_{центра\ масс}\ , \tag{3.3}$$

где $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$ - масса системы материальных точек.

Соотношение (3.3) позволяет выразить импульс твердого тела через массу тела и скорость его центра масс. Для этого тело разбивают на n бесконечно малых частей. Импульс твердого тела будет равен сумме импульсов каждой части. В результате можно получить следующее выражение для импульса твердого тела:

$$\vec{P}_{твердого\ тела} = m\vec{V}_{центра\ масс\ тела}\ . \tag{3.4}$$

Из полученных выражений для импульса системы материальных точек и твердого тела следует, что вектор импульса тела и системы точек направлен по вектору скорости центра масс.

Рассмотрим условия, при которых сохраняется импульс материальной точки. Пусть точка массой m в начальный момент времени t_0 имеет скорость $\vec{V}_0$, а через некоторый промежуток времени Δt материальная точка, двигаясь под действием сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$, приобретает скорость $\vec{V}$. Запишем второй закон Ньютона для материальной точки:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\ .$$

Учитывая, что вектор ускорения вычисляется по формуле $\vec{a} = \dfrac{\vec{V} - \vec{V}_0}{\Delta t}$, перепишем предыдущее равенство в виде:

$$m\frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\ . \tag{3.5}$$

Умножив обе части данного равенства на время Δt, получим следующее соотношение:

$$m\ \vec{V} - \vec{V}_0\ =\ \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\ \ \Delta t \ \Rightarrow\ m\vec{V} - m\vec{V}_0 =\ \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\ \ \Delta t\ . \tag{3.6}$$

Из последнего соотношения вытекает ***закон изменения импульса материальной точки:*** *вектор изменения импульса* $\vec{P}-\vec{P}_0$ *материальной точки равен произведению векторной суммы всех сил, действующих на точку* $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n$*, на промежуток времени их действия* Δt.

$$\vec{P}-\vec{P}_0 = \ \vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n \ \ \Delta t\,, \qquad (3.7)$$

где $\vec{P}-\vec{P}_0=\Delta\vec{P}$ - вектор изменения импульса материальной точки.

Из равенства (3.7) следует, что изменение импульса точки равно нулю в том случае, если сумма всех сил, действующих на нее, равна нулю. Заметим также, что вектор изменения импульса материальной точки всегда направлен по равнодействующей всех сил $\vec{F}_1+\vec{F}_2+\ldots+\vec{F}_n$. Вспомнив, что равнодействующая всех сил всегда направлена по вектору ускорения точки, можем утверждать, что *вектор изменения импульса точки направлен по вектору ускорения.*

§ 3.2 Закон сохранения импульса

Выясним, при каких условиях сохраняется импульс системы материальных точек. Для простоты рассмотрим следующий пример. Пусть две материальные точки массами m_1 и m_1 взаимодействуют между собой с силами $\vec{f}_{12}$ и $\vec{f}_{21}$, где $\vec{f}_{12}$ - вектор силы, с которой вторая точка действует на первую; $\vec{f}_{21}$ - соответствующая величина для второй точки. Обозначим сумму всех внешних сил, действующих на первую точку через $\vec{F}_1$, а сумму всех внешних сил, действующих на вторую точку, — через $\vec{F}_2$. Запишем закон изменения импульса для первой и второй точки:

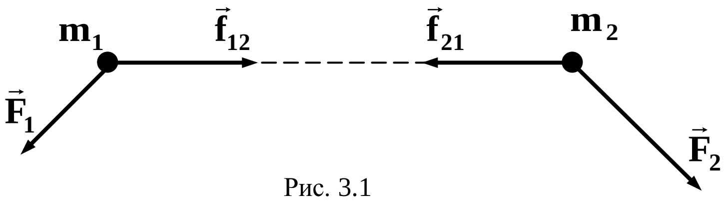


Рис. 3.1

$$\Delta\vec{P}_1=\vec{P}_1'-\vec{P}_1= \ \vec{F}_1+\vec{f}_{12} \ \ \Delta t\,;$$

$$\Delta\vec{P}_2=\vec{P}_2'-\vec{P}_2= \ \vec{F}_2+\vec{f}_{21} \ \ \Delta t\,,$$

где $\Delta\vec{P}_1,\Delta\vec{P}_2$ - изменение импульса первой и второй точки соответственно; $\vec{P}_1,\vec{P}_2$ - начальный импульс первой и второй точки, а $\vec{P}_1',\vec{P}_2'$ - импульс первой и второй точки через промежуток времени Δt. Сложив предыдущие равенства, получим выражение:

$$\vec{P}_1'-\vec{P}_1 \ + \ \vec{P}_2'-\vec{P}_2 \ = \ \vec{F}_1+\vec{f}_{12} \ \ \Delta t+ \ \vec{F}_1+\vec{f}_{12} \ \ \Delta t\,.$$

Проведя несложные преобразования, получим соотношение:

$$\vec{P}_1'+\vec{P}_2' \ - \ \vec{P}_1+\vec{P}_2 \ = \ \vec{F}_1+\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}+\vec{F}_2 \ \ \Delta t\,.$$

Из третьего закона Ньютона вытекает, что сумма внутренних сил $\vec{f}_{12}$, $\vec{f}_{21}$ равна нулю. Положив в последнем соотношении $\vec{f}_{12}+\vec{f}_{21}=\vec{0}$, получим:

$$\vec{P}_1'+\vec{P}_2' \ - \ \vec{P}_1+\vec{P}_2 \ = \ \vec{F}_1+\vec{F}_2 \ \ \Delta t\,,$$

где $\vec{P}_1+\vec{P}_2$ - начальный импульс системы; $\vec{P}_1'+\vec{P}_2'$ - конечный импульс системы, а $\left[\ \vec{P}_1'+\vec{P}_2' \ - \ \vec{P}_1+\vec{P}_2 \ \right]$ - вектор изменения импульса системы.

Таким образом, мы получили ***закон изменения импульса системы материальных точек***: *изменение импульса системы материальных точек равно произведению суммы* ***всех внешних сил****, действующих на систему, на время действия этих сил*, т.е.

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \ \sum\vec{F}_i \ {}_{внешних}\,\Delta t\,. \qquad (3.8)$$

Из данных рассуждений следует, что внутренние силы, с которыми отдельные части системы взаимодействуют между собой, могут изменить только импульс тех частей, к которым эти силы приложены. Однако внутренние силы не могут изменить полный импульс системы. Полный импульс системы изменяется только в результате действия внешних сил. Соотношение (3.8) позволяет сформулировать условия, при которых сохраняется импульс системы:

1. изменение импульса $\Delta\vec{P}_{системы}$ равно нулю в том случае, если векторная сумма всех внешних сил равна нулю, то есть $\left(\sum \vec{F}_i\right)_{внешних} = 0$,

2. изменение импульса $\Delta\vec{P}_{системы}$ равно нулю в том случае, если время в течение которого действуют внешние силы, является достаточно малой величиной, то есть $\Delta t \to 0$ (например, удар).

Замкнутой *называется механическая система, на которую не действуют внешние силы, либо векторная сумма всех внешних сил равна нулю.*

Таким образом, мы пришли к формулировки ***закона сохранения импульса***:
импульс замкнутой механической системы не изменяется со временем ни по величине, ни по направлению при любых движениях и взаимодействиях тел системы.

Заметим, что данное утверждение было получено для механической системы, состоящей из двух материальных точек, однако, проводя рассуждения для произвольной системы, можно убедиться, что и в этом случае импульс изолированной системы будет сохраняться со временем.

Сформулируем важное следствие, вытекающее из соотношения (3.8). Рассмотрим незамкнутую механическую систему, для которой направление вектора суммы всех внешних сил $\left(\sum \vec{F}_i\right)_{внешних}$ не изменяется в течение промежутка времени Δt. В этом случае, проекция вектора изменения импульса механической системы на ось ОХ, направленную перпендикулярно вектору $\left(\sum \vec{F}_i\right)_{внешних}$, равна нулю, так как равна нулю проекция на эту ось вектора суммы всех внешних сил, т.е.:

$$\left(\Delta\vec{P}_{системы}\right)_x = 0 \Rightarrow \left(P'_{1x} + P'_{2x}\right) - \left(P_{1x} + P_{2x}\right) = 0 \Rightarrow \left(P'_{1x} + P'_{2x}\right) = \left(P_{1x} + P_{2x}\right).$$

Последнее равенство гласит, что для механической системы, в которой направление вектора суммы всех внешних сил $\left(\sum \vec{F}_i\right)_{внешних}$ остается постоянным в течение времени Δt, сумма проекций импульсов тел механической системы на ось, перпендикулярную вектору $\left(\sum \vec{F}_i\right)_{внешних}$, не изменяется в течение Δt.

В качестве примера рассмотрим столкновение двух тележек. Пусть две тележки массами m_1 и m_2 движутся равномерно навстречу друг другу со скоростями $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$ соответственно. Силами трения, действующими на тележки, пренебрегаем. На тележки до столкновения действуют внешние тела: Земля, с силой тяжести $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$, и горизонтальная поверхность с силой реакции $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$. Изобразим все силы, действующие на них до столкновения (рис., а).

Поскольку сумма сил, действующих на каждое из тел, равна нулю, то импульс каждого тела сохраняется со временем, и, следовательно, сохраняется импульс всей системы. В момент столкновения на первый шар со стороны второго действует сила упругости $\vec{F}_{12}$, соответственно на второй со стороны первого — $\vec{F}_{21}$. Действия этих сил приводят к изменению импульса каждой тележки. Так первая тележка до столкновения двигалась равномерно, то сумма сил $m_1\vec{g}$ и $\vec{N}_1$ равна нулю, т.е. $m_1\vec{g} + \vec{N}_1 = 0$. Аналогичное утверждение справедливо и для сил $m_2\vec{g}$ и $\vec{N}_2$, т.е. $m_2\vec{g} + \vec{N}_2 = 0$. Поэтому рассматриваемая механическая система является замкнутой, и, следовательно, полный импульс системы сохраняется со временем. Таким образом, сумма импульсов тележек до столкновения равна сумме импульсов тележек после столкновения, т.е.

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2', \qquad (3.9)$$

где $m_1\vec{V}_1$, $m_2\vec{V}_2$ - импульс первой и второй тележки до столкновения, а $m_1\vec{V}_1'$, $m_2\vec{V}_2'$ аналогичные величины этих тел после столкновения. При неупругом столкновении, т.е. когда после столкновения тележки движутся как одно целое, т.е. ($\vec{V}_1' = \vec{V}_2' = \vec{V}$), закон сохранения импульса записывается в виде:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = \ m_1 + m_2 \ \ \vec{V}, \qquad (3.10)$$

где $\vec{V}$ - вектор скорости совместного движения тележек после столкновения.

§ 3.3 Механическая работа. Потенциальная энергия

Введем понятие механической работы постоянной силы. Рассмотрим следующий пример. Пусть на тело действует сила $\vec{F}$, направление и величина которой не изменяются в процессе движения тела по плоскости. Пусть под действием данной силы тело совершает прямолинейное движение. Вектор перемещения тела обозначим $\vec{S}$, а угол между вектором перемещения и вектором силы обозначим α .

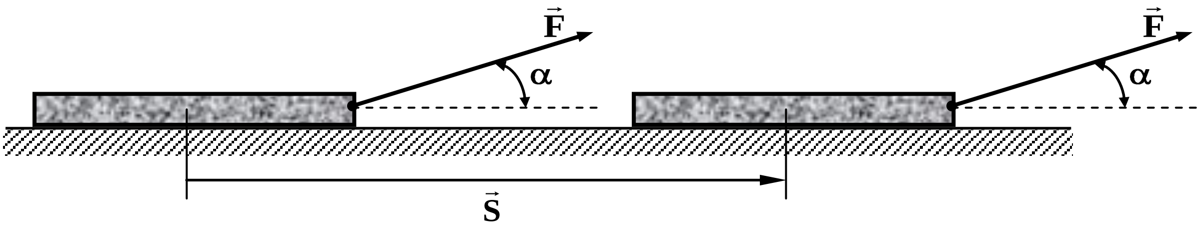


Рис. 3.2

Тогда ***механической работой*** *постоянной по величине и направлению силы называется скалярная величина, равная произведению величины силы* $\left|\vec{F}\right|$, *действующей на тело, на величину вектора перемещения* $\left|\vec{S}\right|$ *точки приложения силы и на косинус угла между векторами* $\left|\vec{F}\right|$ и $\left|\vec{S}\right|$, т.е.:

$$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha . \qquad (3.11)$$

В системе СИ единицей измерения механической работы является **Джоуль**: *Дж = Н·м*.
Из выражения (3.11) видно, что величина работы может быть как положительной, так и отрицательной. Знак данной величины определяется косинусом угла α. *Если угол* α *меньше* 90^0*, работа положительная, если* $90^0 < \alpha \le 180^0$ *, то величина работы отрицательная. В том случае, когда вектор силы перпендикулярен вектору перемещения, величина работы равна нулю.* Если же вектор силы изменяется при движении тела или траектория движения является кривая линия, данное выражение для механической работы неприменимо. В этом случае траекторию движения разбивают на такие бесконечно малые части, что в пределах каждой части вектор силы меняется незначительно. Находят величину работы на каждом участке траектории, используя равенство (3.11). Полная работа находится суммированием соответствующих работ на каждом участке траектории.

Остановимся более подробно на работе, которую совершает сила тяжести над движущимися телами. Вначале рассмотрим движение тела по наклонной плоскости. Покажем, что в данном случае работа силы тяжести не зависит от угла наклонной плоскости. Возьмем две наклонные плоскости с разными углами наклона и одинаковой высотой. Пусть тело бесконечно малых размеров движется по наклонной плоскости (см. рис. 3.3).

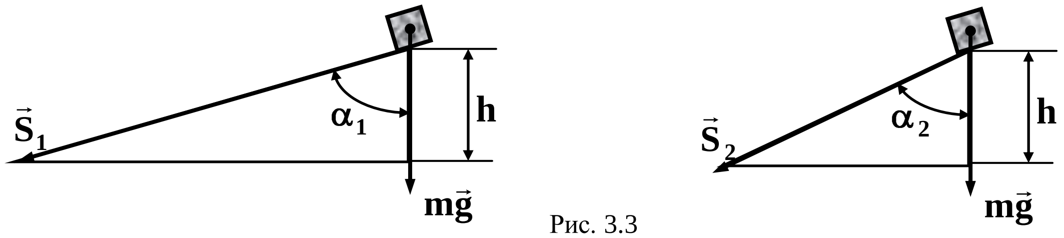


Рис. 3.3

Запишем соотношения для механической работы, совершаемой силой тяжести $m\vec{g}$ для тела, движущегося по наклонной плоскости с углом наклона α_1 и для тела, движущегося по наклонной плоскости с углом наклона α_2:

$$A_1 = \left|m\vec{g}\right| \cdot \left|\vec{S}_1\right| \cdot \cos\alpha_1; \qquad A_2 = \left|m\vec{g}\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right| \cdot \cos\alpha_2 .$$

Из рисунка видно, что величины перемещений $\left|\vec{S}_1\right|$, $\left|\vec{S}_2\right|$ связаны с высотой наклонной плоскости следующими соотношениями:

$$\left|\vec{S}_1\right| = \frac{h}{\cos\alpha_1}, \qquad \left|\vec{S}_2\right| = \frac{h}{\cos\alpha_2} .$$

Подставим в предыдущие равенства правые части последних соотношений для величин $\left|\vec{S}_1\right|$, $\left|\vec{S}_2\right|$, получим выражения: $A_1 = \left|m\vec{g}\right| \cdot h$; $A_2 = \left|m\vec{g}\right| \cdot h$.

Из последних выражений видно, что величина работы силы тяжести не зависит от угла наклонной плоскости, а зависит только от высоты наклонной плоскости h.

Рассмотрим движение тела, брошенного горизонтально с высоты h (см. рис. 3.4). Вычислим величину работы силы тяжести, совершаемую над телом, движущегося по параболе. Разобьем траекторию движения на n бесконечно малых частей, таких, что на каждом участке пройденный путь незначительно отличается от величины перемещения. В этом случае элементарный участок траектории можно рассматривать как наклонную прямую линию. Используя выражения для работы силы тяжести на наклонной плоскости, определим работу на каждом участке и, сложив эти величины, получим величину работы силы тяжести на всем участке траектории, т.е.:

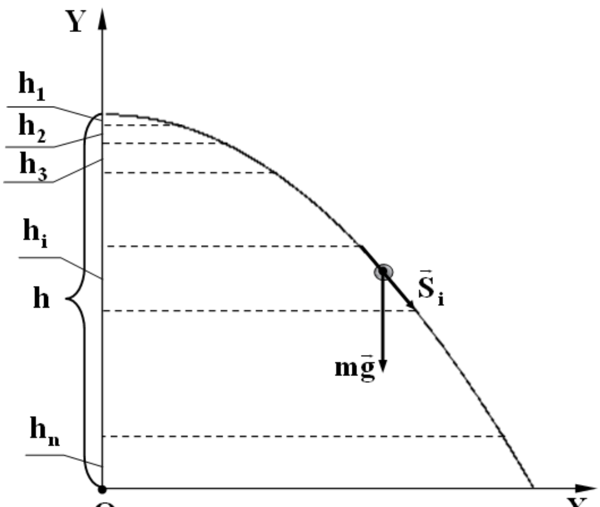


Рис. 3.4

$$A = mgh_1 + mgh_2 + \ldots + mgh_n = mg\left(h_1 + h_2 + \ldots + h_n\right) .$$

Выражение в скобках представляет собой высоту падения тела h. С учетом этого, имеем выражение для работы силы тяжести:

$$A = mgh .$$

Последнее выражение гласит, что при движении тела по параболе работа *силы тяжести зависит только от высоты падения тела, но не зависит от формы траектории движения.* Очевидно, что работа силы тяжести по замкнутой траектории равна нулю.

Консервативными **(**или ***потенциальными***) *называются силы**,** работа которых не зависит от формы траектории, по которой движется материальная точка, а определяется лишь начальным и конечным положением точки, и как следствие работа таких сил на любом замкнутом участке пути равна нулю.*

Потенциальных сил в природе всего пять. К ним относятся следующие: гравитационная сила, сила тяжести, сила упругости, сила Кулона и сила Архимеда. Остальные силы называют неконсервативными.

Если на тело действует консервативная сила, то говорят, что данное тело обладает потенциальной энергией. Например, поднимая тело на высоту h, мы совершаем работу против силы тяжести и увеличиваем величину работы, которую может совершить сила тяжести, если данное тело предоставить самому себе. Этот запас работы силы тяжести численно равен величине потенциальной энергии тела. Приведем без вывода формулы для вычисления потенциальных энергий тел, на которые действуют консервативные силы.

3.3.1 Потенциальная энергия сил гравитации

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}, \tag{3.12}$$

где m_1, m_2 - массы бесконечно малых тел; $r-$ расстояние между ними; $G-$ гравитационная постоянная. Данную формулу можно применять и для однородных тел сферической формы, например, для планет. В этом случае в качестве расстояния r берется расстояние от тела до центра масс планеты.

3.3.2 Потенциальная энергия силы тяжести

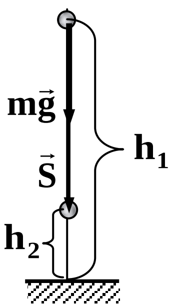


Рис. 3.5

Для материальной точки массой m, поднятой на высоту h над поверхностью Земли (см. рис.3.5), потенциальная энергия вычисляется по формуле:

$$W_p = mgh. \tag{3.13}$$

Для тел, размерами которых нельзя пренебречь, потенциальная энергия силы тяжести находится по формуле:

$$W_p = mgh_{центра\ масс}, \tag{3.14}$$

где $h_{центра\ масс}$ высота центра масс тела.

У центрально симметричных тел центр тяжести совпадает с геометрическим центром.

3.3.3 Потенциальная энергия сил упругости

$$W_p = \frac{k(L-L_0)^2}{2} = \frac{k\Delta x^2}{2}, \tag{3.15}$$

где k - коэффициент жесткости пружины; L_0- длина пружины в недеформированном состоянии; $L-$ длина пружины в заданный момент времени; $\Delta x-$ величина деформации пружины.

Введя понятие потенциальной энергии, мы получили возможность выразить работу консервативных сил через изменение потенциальной энергии. Рассмотрим следующий пример. Пусть материальная точка падает вертикально вниз с высоты h_1 до высоты h_2. Найдем работу, совершенную силой тяжести $m\vec{g}$ на данном участке траектории. По определению работы постоянной силы имеем равенство:

$$A = |m\vec{g}| \cdot |\vec{S}| \cdot \cos\alpha.$$

В данном случае величина угла α равна нулю, а величина перемещения связана с начальной и конечной высотой соотношением:

$$|\vec{S}| = h_1 - h_2.$$

С учетом этого, предыдущее равенство примет следующий вид:

$$A = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2 = -(mgh_2 - mgh_1).$$

Выражение $mgh_2 - mgh_1$ представляет собой изменение потенциальной энергии тела, на которое действует сила тяжести. Учитывая этот факт, последнее равенство запишем в виде:

$$A = -\ mgh_2 - mgh_1\ = -\ W_{p2} - W_{p1}\ = \Delta W_p\,, \qquad (3.16)$$

Из равенства (3.16) следует ***теорема о потенциальной энергии***:

работа консервативной силы равна изменению потенциальной энергии тела, взятому с противоположным знаком, т.е.:

$$A_{конс.сил} = -\ (W_{p2} - W_{p1})\ . \qquad (3.17)$$

Последнее соотношение бывает полезным в том случае, если в задачах требуется найти работу консервативных сил.

Для успешного решения задач по теме «Механическая работа» следует учитывать следующие **методические рекомендации**:

- если известны величина силы и перемещения, а также угол между ними, необходимо использовать формулу (3.11) для определения величины механической работы,
- в остальных случаях, прежде чем приступить к решению задачи, необходимо в начале установить все силы, действующие на рассматриваемое тело. Затем на рисунке показать эти силы,
- выяснить характер движения тела. Если оно движется равномерно, то величина искомой силы вычисляется с помощью первого закона Ньютона. Для равноускоренного движения величина искомой силы находится из второго закона Ньютона,
- затем, используя формулу (3.11), найти величину механической работы требуемой силы.

§ 3.4 Кинетическая энергия. Изменение кинетической энергии

Способность движущегося тела совершить работу оценивается его кинетической энергией. Для материальной точки массой m, движущейся со скоростью $\vec{V}$, *величина кинетической энергии равна половине произведения массы точки на квадрат величины ее скорости*, т.е.:

$$W_k = \frac{mV^2}{2}\ . \qquad (3.18)$$

Кинетическая энергия системы, состоящей из n материальных точек, равна сумме кинетических энергий этих материальных точек:

$$W_{k\ системы} = W_{k1} + W_{k2} + \ldots + W_{k\,n} = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} + \ldots + \frac{m_nV_n^2}{2}\ . \qquad (3.19)$$

Чтобы найти кинетическую энергию твердого тела, его разбивают на n бесконечно малых частей. Находят кинетическую энергию каждой части. Кинетическая энергия всего тела будет равна сумме кинетических энергий бесконечно малых частей. Из определения кинетической энергии твердого тела вытекает, что для тела, совершающего прямолинейное движение, кинетическая энергия равна половине произведения массы всего тела на квадрат его скорости.

Установим связь между изменением кинетической энергии материальной точки и работой сил, которые на нее действуют. Рассмотрим следующий пример. Пусть на точку массой m действует n сил: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Если сумма этих сил не равна нулю, то точка движется с ускорением $\vec{a}$. Запишем второй закон Ньютона в векторном виде:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n\,. \qquad (3.20)$$

Предположим, что под действием этих сил точка движется прямолинейно.

Обозначим перемещение материальной точки $\vec{S}$. Выберем ось OX, направление которой совпадает с направлением перемещения материальной точки. Запишем равенство для проекций векторов, входящих в векторное равенство (3.20), будем иметь следующее соотношение:

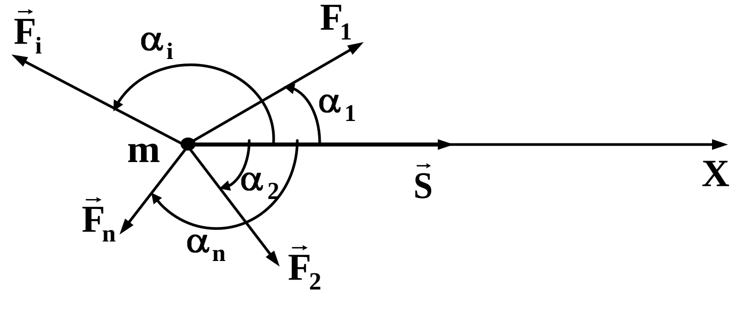


Рис. 3.6

$$ma_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{nx}. \tag{3.21}$$

Выразим проекцию вектора силы $\vec{F}_1$, входящего в равенство (3.21), через величину вектора и угол между осью OX и вектором $\vec{F}_1$, получим равенство:

$$F_{1x} = \left|\vec{F}_1\right| \cos\alpha_1 . \tag{3.22}$$

Для векторов остальных сил имеем аналогичные равенства:

$$F_{2x} = \left|\vec{F}_2\right| \cos\alpha_2, \ldots, F_{nx} = \left|\vec{F}_n\right| \cos\alpha_n . \tag{3.23}$$

Подставим в равенство (3.21) вместо проекций векторов сил правые части соотношений (3.22) и (3.23), получим равенство:

$$ma_x = \left|\vec{F}_1\right| \cos\alpha_1 + \left|\vec{F}_2\right| \cos\alpha_2 + \ldots + \left|\vec{F}_n\right| \cos\alpha_n .$$

Умножив обе части последнего равенства на модуль перемещения материальной точки, получим следующее соотношение:

$$ma_x \left|\vec{S}\right| = \left(\left|\vec{F}_1\right| \cos\alpha_1 + \left|\vec{F}_2\right| \cos\alpha_2 + \ldots + \left|\vec{F}_n\right| \cos\alpha_n\right) \left|\vec{S}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ma_x \left|\vec{S}\right| = \left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_1 + \left|\vec{F}_2\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_2 + \ldots + \left|\vec{F}_n\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_n .$$

Подставив в предыдущее равенство вместо проекции ускорения $a_x = \dfrac{V_x^2 - V_{0x}^2}{2 \cdot S_x}$,

получим соотношение:

$$m\frac{V_x^2 - V_{0x}^2}{2 \cdot S_x}\left|\vec{S}\right| = \left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_1 + \left|\vec{F}_2\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_2 + \ldots + \left|\vec{F}_n\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_n .$$

Учитывая, что $S_x = \left|\vec{S}\right|$, $V_x = \left|\vec{V}\right| = V$ и $V_{0x} = \left|\vec{V}_0\right| = V_0$, получим равенство:

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_1 + \left|\vec{F}_2\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_2 + \ldots + \left|\vec{F}_n\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_n .$$

где $\left(\dfrac{mV^2}{2} - \dfrac{mV_0^2}{2}\right)$ – изменение кинетической энергии материальной точки; $\left|\vec{F}_1\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_1$, $\left|\vec{F}_2\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_2$, … , $\left|\vec{F}_n\right|\left|\vec{S}\right| \cos\alpha_n$ – величина механической работы соответственно первой, второй и силы n. Таким образом, имеем выражение для изменения кинетической энергии материальной точки:

$$\Delta W_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_n . \tag{3.24}$$

Выражение (3.24) получило название ***теоремы об изменении кинетической энергии:*** *изменение кинетической энергии материальной точки равно сумме работ всех сил, действующих на эту точку.*

Данное утверждение легко обобщить на случай криволинейного движения. В этом случае траекторию можно разбить на бесконечно малые прямолинейные участки, записав данную теорему для элементарных участков, а затем, сложив полученные равенства, получаем соотношение аналогичное равенству (3.24).

В тех случаях, когда возникает необходимость использовать теорему об изменении кинетической энергии, требуется соблюдать следующие **методические рекомендации**:

- изобразить все силы, действующие на материальную точку или тело, после чего записать теорему об изменении кинетической энергии с учетом конкретных сил, действующих на тело или материальную точку,
- изобразить на рисунке вектор перемещения. Используя условие задачи, выяснить, работа каких сил равна нулю (работа силы равна нулю в том случае, когда вектор силы

перпендикулярен вектору перемещения). С учетом этого упростить записанное выражение для изменения кинетической энергии.

§ 3.5 Изменение полной механической энергии. Закон сохранения механической энергии

Способность тела совершить работу оценивается его полной механической энергией. ***Полной механической энергией*** $\mathbf{W}$ *называется величина, равная сумме кинетической и потенциальной энергии тела или материальной точки*, т.е.:

$$W = W_к + W_п . \qquad (3.25)$$

Известно, что при выполнении определенных условий величина полной механической энергии не изменяется с течением времени. Установим факторы, влияющие на изменение механической энергии. Для простоты рассуждений рассмотрим материальную точку, на которую действуют силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Работа этих сил на некотором участке траектории равна изменению кинетической энергии материальной точки (см. (3.24)):

$$\Delta W_k = A_1 + A_2 + \ldots + A_n \ ,$$

где A_1 – величина работы силы $\vec{F}_1$; A_2 – величина работы силы $\vec{F}_2$ и A_n – величина работы силы $\vec{F}_n$. Предположим, что среди множества рассматриваемых сил $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots \vec{F}_n$ имеются консервативные силы. Допустим, что консервативными являются силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, а остальные $\vec{F}_3, \vec{F}_4, \ldots, \vec{F}_n$ — неконсервативные. Работу консервативных сил выразим через изменение потенциальной энергии материальной точки. Согласно (3.17) имеем равенство:

$$A_1 + A_2 = -\Delta W_p .$$

С учетом записанного соотношения предыдущее равенство примет вид:

$$\Delta W_k = -\Delta W_p + A_3 + A_4 + \ldots + A_n .$$

Перенесем изменение потенциальной энергии ΔW_p в левую часть равенства

$$\Delta W_k + \Delta W_p = A_3 + A_4 + \ldots + A_n .$$

Выразим изменение кинетической и потенциальной энергий через начальные и конечные значения:

$$\Delta W_k = W_{k_2} - W_{k_1} \ , \qquad \Delta W_p = W_{p_2} - W_{p_1} ,$$

где W_{k_2}, W_{k_1} – соответственно конечное и начальное значение кинетической энергии материальной точки; W_{p_2}, W_{p_1} – соответствующие величины для потенциальной энергии материальной точки. Подставим правые части полученных соотношений вместо ΔW_k и ΔW_p в предыдущее равенство, будем иметь следующее соотношение:

$$W_{k_2} - W_{k_1} \ + \ W_{p_2} - W_{p_1} \ = A_3 + A_4 + \ldots + A_n .$$

Последнее равенство преобразуем к следующему виду:

$$W_{k_2} + W_{p_2} \ - \ W_{k_1} + W_{p_1} \ = A_3 + A_4 + \ldots + A_n ,$$

где $W_{k_2} + W_{p_2}$ – конечное, а $W_{k_1} + W_{p_1}$ – начальное значение полной механической энергии материальной точки; $A_3 + A_4 + \ldots + A_n$ – сумма работ всех неконсервативных сил, действующих на материальную точку.

Таким образом, мы получили ***закон изменения полной механической энергии материальной точки:***

изменение полной механической энергии материальной точки равно сумме работ всех неконсервативных сил действующих на эту материальную точку, т.е.:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \sum A_{нк} , \qquad (3.26)$$

где $\Delta W = W_2 - W_1$ – изменение механической энергии; $\sum A_{нк}$ – сумма работ неконсервативных сил.

Из полученного соотношения следует, что механическая энергия материальной точки не изменяется с течением времени, если сумма работ неконсервативных сил $\sum A_{нк}$ равна нулю. Условие $\sum A_{нк} = 0$ выполняется в следующих случаях:

1. на материальную точку действуют только консервативные силы,
2. на материальную точку действуют и консервативные и неконсервативные силы, однако сумма работ неконсервативных сил равна нулю.

Аналогичное утверждение можно получить для системы, состоящей из n материальных точек. Для этого достаточно записать соотношение (3.26) для каждой материальной точки, а затем, сложив полученные равенства, получим соотношение для изменения механической энергии системы:

$$\Delta W_{системы} = \sum A_{нк\ \ системы}, \tag{3.27}$$

где $\Delta W_{системы}$ – изменение механической энергии системы; $\sum A_{нк\ \ системы}$ – сумма работ неконсервативных сил, действующих на систему. Таким образом, для системы материальных точек так же справедлив ***закон изменения полной механической энергии***:
изменение полной механической энергии системы равно алгебраической сумме работ всех неконсервативных сил, действующих на тела этой системы.

Заметим, что вклад в выражение $\sum A_{нк\ \ системы}$ дают как внешние, так и внутренние неконсервативные силы, действующие на рассматриваемую систему материальных точек.

Полная механическая энергия системы материальных точек не изменяется в том случае, когда в ней действуют только консервативные силы. Полная механическая энергия может сохраняться в присутствии неконсервативных сил в том случае, если алгебраическая сумма работ этих сил равна нулю. Например, при равномерном движении тела по горизонтальной поверхности под действием внешней силы $\vec{F}$ и в присутствии силы трения полная энергия тела не изменяется со временем.

При решении задач с использованием соотношение (3.27) необходимо придерживаться следующих **методических рекомендаций**:

- изобразить все силы, действующие на тело или систему тел. Выяснить, какие из этих сил являются консервативными, а какие неконсервативными,
- если на тело или систему тел действуют только консервативные силы, записать закон сохранения полной механической энергии,
- при наличии неконсервативных сил необходимо выразить изменение механической энергии через алгебраическую сумму работ неконсервативных сил.

§ 3.6 Мощность. Коэффициент полезного действия

Довольно часто важно знать не только величину работы, которую совершает та или иная система или устройство, но и то, как быстро совершалась эта работа. Для характеристики быстроты совершения работы вводят понятие мощности. Допустим, что в течение промежутка времени Δt некоторая сила совершила работу, величина которой равна A, тогда
средней мощностью *называется величина, равная следующему отношению:*

$$N_{ср} = \frac{A}{\Delta t}. \tag{3.28}$$

В системе **СИ** единицей измерения мощности является $Вт = \frac{Дж}{с}$.

Если работа совершается неравномерно, то дополнительно вводят понятие мгновенной мощности. ***Мгновенная мощность*** *равна производной от величины механической работы по времени, то есть*:

$$N = \frac{dA}{dt}\ . \qquad (3.29)$$

Используя формулу для нахождения механической работы, легко можно установить следующее соотношение для мгновенной мощности постоянной во времени силы $\vec{F}$:

$$N = \left|\vec{F}\right|\left|\vec{V}\right|\cos\alpha\ , \qquad (3.30)$$

где $\left|\vec{F}\right|-$ мгновенное значение силы; $\left|\vec{V}\right|-$ величина мгновенной скорости тела в некоторый момент времени t; и $\alpha-$ угол между векторами скорости и силы. В том случае, когда работа совершается равномерно, нет необходимости говорит о средней или мгновенной мощности, поскольку эти величины одинаковы.

Для характеристики эффективности использования машин или устройств, совершающих механическую работу, вводят понятие коэффициента полезного действия.

Коэффициентом полезного действия *называется величина, равная отношению величины полезной работы к величине полной работы*, то есть:

$$\eta = \frac{A_{полезная}}{A_{полная}}\,. \qquad (3.31)$$

Поскольку рассмотренные величины мощности и коэффициента полезного действия определены через понятие механической работы, то при решении задач по данной теме необходимо пользоваться теми же методическими рекомендациями, которые применялись для нахождения механической работы**.** Необходимо также помнить, что для определения механической работы можно пользоваться теоремой об изменении кинетической энергии. Во многих задачах данная теорема значительно сокращает ход решения задачи.

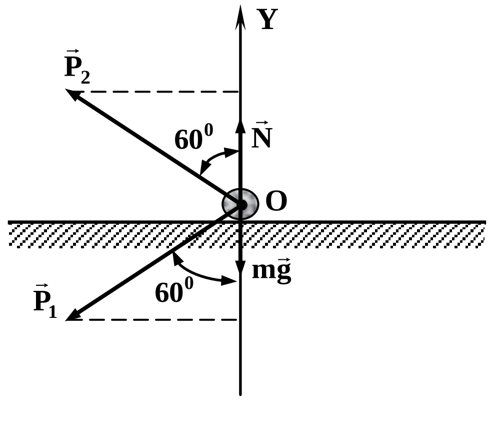
Вопросы для самопроверки

1. Импульс материальной точки, импульс системы материальных точек.
2. Внешние и внутренние силы. Замкнутая механическая система. Законы изменения импульса механической системы и закон сохранения импульса механической системы.
3. Кинетическая, потенциальная и полная механическая энергии.
4. Закон изменения полной механической энергии, закон сохранения полной механической энергии. Консервативные и неконсервативные силы.
5. Теорема о кинетической энергии и теорема о потенциальной энергии.
6. Работа. Мощность. КПД.

§ 3.7 Примеры решения задач

Пример 3.1 Мяч массой $m = 100\,г$, летевший со скоростью $\left|\vec{V_1}\right| = 20\ м/с$, ударился о горизонтальную поверхность. Угол (угол между направлением вектора скорости и перпендикуляром к плоскости) равен $\mathbf{60^0}$. Продолжительность удара равна $\Delta t = 0,01\,с$. Найти изменение импульса, если удар абсолютно упругий, а угол падения равен углу отражения. Найти величину средней силы нормального давления мяча на горизонтальную поверхность.

Решение:



Изобразим на рисунке вектор импульса мяча до и после столкновения, а также силы, действовавшие на мяч во время удара. Вектор изменения импульса равен разности векторов $\vec{P}_2$ и $\vec{P}_1$, т.е.:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1. \qquad (1)$$

На мяч во время столкновения действуют две силы; сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Вектор изменения импульса мяча $\Delta\vec{P}$ направлен по сумме сил $\vec{N} + m\vec{g}$, т.е.

вектор $\Delta\vec{P}$ перпендикулярен горизонтальной плоскости. Проведем ось OY перпендикулярно горизонтальной плоскости. Для векторного равенства (1) запишем равенство для проекций векторов, входящих в это равенство:

$$\Delta P_y = P_{2y} - P_{1y} = P_2\cos 60^0 - \left(-P_1\cos 60^0\right) = P_2\cos 60^0 + P_1\cos 60^0$$

Так как удар мяча о горизонтальную поверхность упругий, то величина импульса мяча до столкновения равна величине импульса мяча после столкновения, т.е. $P_1 = P_2 = mV_1$. С учетом этого соотношения предыдущее равенство примет вид:

$$\Delta P_y = mV_1\cos 60^0 + mV_1\cos 60^0 = 2mV_1\cos 60^0 .$$

В последнее равенство подставим численные данные, получим величину проекции изменения импульса на ось OY:

$$\Delta P_y = 2\cdot 0{,}1\cdot 20\cdot\cos 60^0 = 2\,\frac{кг\cdot м}{с} .$$

Проекция вектора изменения импульса имеет положительный знак, следовательно, направление вектора $\Delta\vec{P}$ совпадает с направлением оси OY, .т.е. вектор изменения импульса мяча направлен вертикально вверх.

Запишем закон изменения импульса мяча во время удара:

$$\Delta\vec{P} = (\vec{N} + m\vec{g})\Delta t \ . \qquad (2)$$

Чтобы найти величину силы реакции, спроектируем векторное равенство (2) на ось OY, получим следующее соотношение:

$$\Delta P_y = (N_y + mg_y)\Delta t = (N - mg)\Delta t \, . \qquad (3)$$

Из равенства (3) выразим величину силы реакции, получим соотношение:

$$N = \frac{\Delta P}{\Delta t} + mg = \frac{2}{0.1} + 0{,}1\cdot 9{,}81 \approx 21H \ .$$

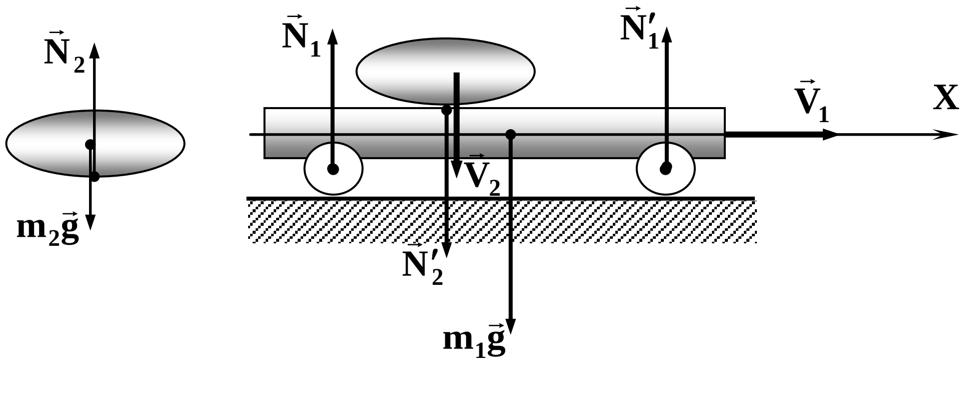
По третьему закону Ньютона величина силы реакции равна величине силы нормального давления мяча на горизонтальную поверхность.

Ответ: $\Delta P_y = 2\,\frac{кг\cdot м}{с}$, $N \approx 21\,H$.

Пример 3.2 На вагонетку массой $m_1 = 800\,кг$, движущуюся по горизонтальному пути со скоростью $V_1 = 0{,}2\,м/с$, насыпали сверху щебень массой $m_2 = 200\,кг$. Найти изменение величины скорости движения вагонетки.

Решение:

На щебень во время удара Δt действовали следующие силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила реакции поверхности вагонетки $\vec{N}_2$. На вагонетку в этот промежуток времени действовали следующие силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, силы реакции горизонтальной поверхности рельс $\vec{N}_1, \vec{N}_1'$, и, кроме того, сила нормального давления щебня на поверхность вагонетки $\vec{N}_2'$.



Изобразим на отдельных рисунках данные силы. Для рассматриваемой механической системы «щебень-вагонетка» силы $\vec{N}_2$ и $\vec{N}'_2$ являются внутренними, и, следовательно, эти силы не изменяют импульса системы «щебень-вагонетка». Силы $m_1\vec{g}, \vec{N}_1, \vec{N}'_1, m_2\vec{g}$ являются внешними для этой системы. Запишем закон изменения импульса системы «щебень-вагонетка»:

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \ m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}'_1 + m_2\vec{g} \ \ \Delta t \ . \tag{1}$$

Изобразим на рисунке вектор скорости вагонетки до падения щебня и вектор скорости щебня в момент удара. Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по скорости движения вагонетки $\vec{V}_1$. Запишем для векторного равенства (1) равенство для проекций на ось OX векторов, входящих в это равенство, получим следующее соотношение:

$$\Delta P_{системы \ \ x} = \ m_1\vec{g}_x + N_{1x} + N'_{1x} + m_2 g_x \ \ \Delta t \, . \tag{2}$$

Из рисунка видно, что векторы сил $m_1\vec{g}, \vec{N}_1, \vec{N}'_1, m_2\vec{g}$ направлены перпендикулярно оси OX, и, следовательно, проекции векторов этих сил на эту ось будут равны нулю, т.е. $m_1 g_x = 0, m_2 g_x = 0, N_{1x} = 0, N'_{1x} = 0$. С учетом этих равенств выражение (2) преобразуется к следующему виду:

$$\Delta P_{системы \ \ x} = 0 \, .$$

Из данного равенства видно, что, хотя рассматриваемая система щебень-вагонетка не является замкнутой, однако проекция импульса этой системы на ось OX не изменяется в течение времени удара щебня о поверхность вагонетки. В системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, импульс системы до удара равен $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$, соответственно после удара импульс системы равен $m_1 + m_2 \ \ \vec{V}$, где $\vec{V}$ – вектор скорости системы «щебень-вагонетка» после удара. Найдем вектор изменения импульса системы:

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \ m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 \ \ - \ m_1 + m_2 \ \ \vec{V} \, .$$

Спроектировав это равенство на ось OX, получим:

$$\Delta P_{системы \ \ x} = \ m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} \ \ - \ m_1 + m_2 \ \ V_x = 0 \ . \tag{3}$$

Учитывая, что проекция вектора скорости щебня в момент удара на ось OX равна нулю ($V_{2x} = 0$), преобразуем равенство (3) к следующему виду:

$$m_1 V_1 - \ m_1 + m_2 \ \ V = 0 \, . \tag{4}$$

Из равенства (4) выразим величину скорости системы после удара:

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_{2\,1}} \ V_1 \ .$$

Изменение величины скорости вагонетки за время удара найдем по формуле:

$$\Delta V = V - V_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} V_1 - V_1 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} - 1 \right) V_1 .$$

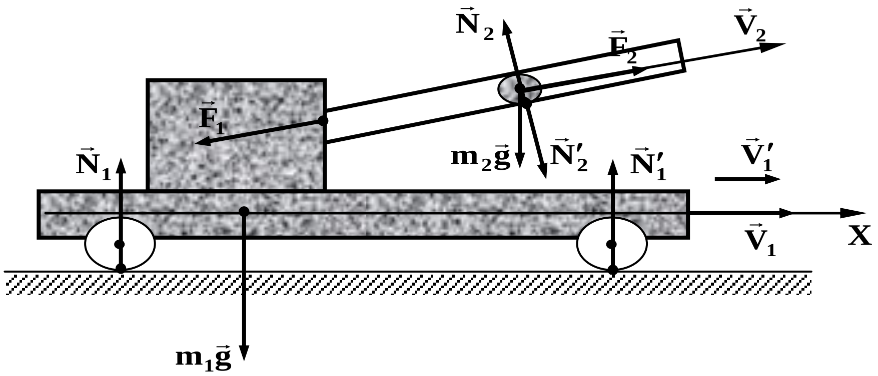
Подставив цифровые данные, найдем величину ΔV:

$$\Delta V = \left(\frac{200}{200 + 800} - 1 \right) \cdot 0,2 = -0,16 \ м/с \, .$$

Ответ: Скорость вагонетки уменьшилась на величину $\Delta V = -0,16 \ м/с$.

Пример 3.3 На железнодорожной платформе, движущейся горизонтально со скоростью $V_1 = 7,2\,км/ч$, установлено орудие, ствол которого расположен в сторону движения платформы под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту. Из орудия произвели выстрел, после чего скорость платформы стала равна $V_1' = 3,6\,км/ч$. Пренебрегая силами трения, найти скорость снаряда, вылетевшего из орудия, если масса снаряда равна $m_2 = 10\,кг$, масса платформы с орудием $m_1 = 1000\,кг$. Массой и импульсом пороховых газов пренебречь.

Решение:



Изобразим все силы, действующие на платформу и снаряд во время выстрела. На снаряд действуют следующие силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила реакции внутренней поверхности ствола $\vec{N}_2$ и сила давления со стороны пороховых газов $\vec{F}_2$. На платформу вместе с орудием действуют следующие силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, силы реакции горизонтальной поверхности рельс $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_1'$, сила нормального давления снаряда на ствол орудия $\vec{N}_2'$ и сила давления пороховых газов $\vec{F}_1$.

Для рассматриваемой механической системы «снаряд — платформа с орудием» вместе с орудием внутренними силами являются: сила реакции $\vec{N}_2$, сила нормального давления $\vec{N}_2'$, силы давления пороховых газов $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$. Силы тяжести $m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$, а также силы реакции $\vec{N}_1$, $\vec{N}_1'$ являются внешними. Запишем закон изменения импульса для системы «снаряд — платформа с орудием»:

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \sum \vec{F}_{i\ внешних}\,\Delta t = \left(m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_1' + m_2\vec{g}\right)\Delta t\,, \qquad (1)$$

где $\Delta t -$ время выстрела. Заметим, что, вследствие действия сил давления пороховых газов, рассматриваемая система не является замкнутой, поскольку сумма сил ($m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_1' + m_2\vec{g}$) не равна нулю. Однако в течение времени выстрела направление сил $m_1\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_1'$, $m_2\vec{g}$ не изменяется. Поэтому выбираем ось ОХ по направлению движения платформы, и, спроектировав равенство (1) на эту ось, получим следующее соотношение:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 g_x + N_{1x} + N_{1x}' + m_2 g_x\right)\Delta t\,. \qquad (2)$$

Проекции сил $m_1\vec{g}$, $\vec{N}_1$, $\vec{N}_1'$, $m_2\vec{g}$ на ось ОХ равны нулю, так как направление этих сил перпендикулярно оси ОХ. С учетом этого равенство (2) примет вид:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = 0\,. \qquad (3)$$

Данное равенство гласит, что, хотя рассматриваемая система «снаряд — платформа вместе с орудием» не является замкнутой, проекция вектора импульса системы на ось ОХ до выстрела будет равна проекции вектора импульса этой системы после выстрела.

Выразим в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли, вектор импульса системы до и после выстрела через массу тел и их скорости:

$$\vec{P}_1 = m_1 + m_2 \ \vec{V}_1; \qquad \vec{P}_2 = m_1\vec{V}_1' + m_2\vec{V}_2,$$

где $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ - соответственно вектор импульса системы до и после выстрела; $\vec{V}_1$ – скорость платформы до выстрела; $\vec{V}_1'$ – скорость платформы после выстрела; $\vec{V}_2$ – скорость снаряда сразу после выстрела.

С учетом записанных соотношений равенство (3) примет вид

$$\Delta P_{системы \ x} = P_{2x} - P_{1x} = m_1V_{1x}' + m_2V_{2x} - m_1 + m_2 \ V_{1x} = 0. \qquad (4)$$

Определив проекции скоростей тел до и после выстрела и подставив в равенство (4), получим следующее уравнение:

$$m_1V_1' + m_2V_2\cos 30^0 - m_1 + m_2 \ V_1 = 0. \qquad (5)$$

Из данного уравнения находим выражение для скорости снаряда:

$$V_2 = \frac{m_1 + m_2 \ V_1 - m_1V_1'}{m_2\cos 30^0}. \qquad (6)$$

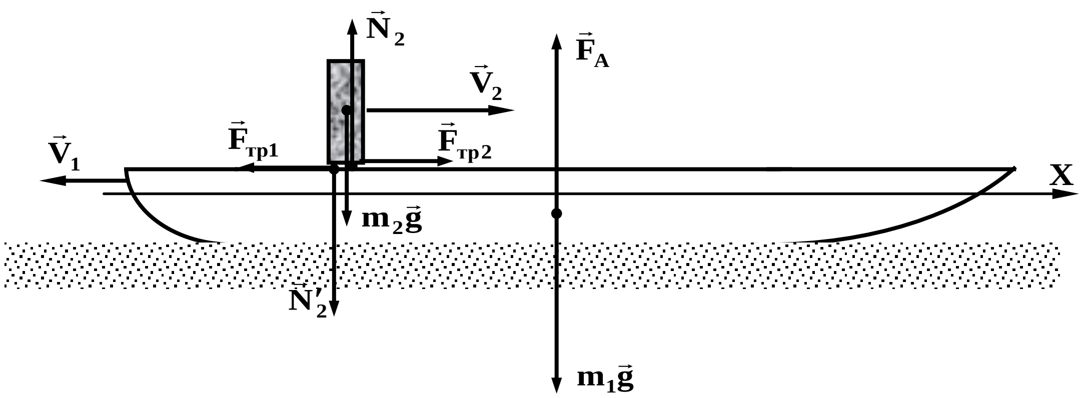
Подставив численные значения величин, входящих в уравнение (6), найдем величину скорости снаряда после выстрела:

$$V_2 = \frac{1000 + 10 \ \cdot 2 - 1000 \cdot 1}{10 \cdot \cos 30^0} \approx 118 \ м/с.$$

Ответ: $V_2 \approx 118 \ м/с$.

Пример 3.4 Лодка массой $m_1 = 180\,кг$ и человеком массой $m_2 = 90\,кг$ в начальный момент находятся в покое относительно поверхности воды. Затем человек встает и идет по лодке. С какой скоростью будет двигаться человек относительно поверхности воды, если относительно лодки он движется со скоростью $V_{21} = 1\,м/с$? Трением лодки о воду пренебречь.

Решение:



Рассмотрим все силы, действующие в системе «человек—лодка». При движении человека на него действуют следующие силы: сила тяжести $m_2\vec{g}$, сила реакции поверхности лодки $\vec{N}_2$ и сила трения $\vec{F}_{тр2}$. На лодку действует сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила нормального давления человека $\vec{N}_2'$, сила трения $\vec{F}_{тр1}$ и выталкивающая сила (сила Архимеда) $\vec{F}_A$.

При ходьбе человека изменяется сила нормального давления $\vec{N}_2'$ и, следовательно, сила реакции $\vec{N}_2$ также изменяется. При этом в данной системе возникают колебания в вертикальной плоскости. Объем погруженной части лодки изменяется. Это в свою очередь приводит к изменению силы Архимеда. Для рассматриваемой системы внутренними силами являются следующие силы: сила реакции поверхности лодки $\vec{N}_2$, сила нормального давления человека $\vec{N}_2'$, силы трения $\vec{F}_{тр1}$, $\vec{F}_{тр2}$. Силы тяжести лодки $m_1\vec{g}$ и человека $m_2\vec{g}$ и сила

Архимеда $\vec{F}_A$ являются внешними для системы «человек—лодка». Сила Архимеда изменяется при движении человека вдоль лодки, поэтому рассматриваемая система не является замкнутой, и, следовательно, закон сохранения импульса для данной системы не выполняется.

Запишем закон изменения импульса для системы «человек—лодка»

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \left(\sum\vec{F}_i\right)_{внешних}\Delta t = \left(m_1\vec{g} + \vec{F}_A + m_2\vec{g}\right)\Delta t\,. \quad (1)$$

Все внешние силы перпендикулярны поверхности воды, поэтому, выбрав ось OX по движению человека и, спроектировав векторное равенство (1) на эту ось, получим выражение:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = \left(m_1 g_x + F_{Ax} + m_2 g_x\right)\Delta t = 0\,. \quad (2)$$

Из данного выражение видно, что проекция импульса системы человек—лодка на ось OX сохраняется в течение времени движения человека вдоль лодки. Заметим, что начальный импульс системы $\vec{P}_1$ равен нулю (система покоилась). Выразим конечный импульс системы $\vec{P}_2$ в системе отсчета, связанной с поверхностью воды, через массы тел и их скорости движения относительно поверхности воды:

$$\vec{P}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2\,, \quad (3)$$

где $m_1\vec{V}_1$ – импульс лодки, $m_2\vec{V}_2$ – импульс человека.

С учетом выражения (3) равенство (2) примет вид:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = P_{2x} - P_{1x} = \left(m_1V_{1x} + m_2V_{2x}\right) - 0 = 0\,.$$

Определив проекции скоростей на ось координат, получим следующее уравнение:

$$-m_1V_1 + m_2V_2 = 0\,. \quad (4)$$

Заметим, что в равенство (4) входит неизвестная величина скорости человека относительно поверхности воды V_2. Выразим скорость человека относительно поверхности воды V_2 через скорость человека относительно лодки V_{21}, используем для этого закон сложения скоростей:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{21} + \vec{V}_1\,. \quad (5)$$

Спроектировав векторное равенство (5) на ось OX, получим следующее соотношение:

$$V_2 = V_{21} - V_1\,. \quad (6)$$

Из равенства (6) найдем скорость лодки V_1, и, поставив ее в равенство (4), получим уравнение:

$$-m_1\left(V_{21} - V_2\right) + m_2V_2 = 0\,. \quad (7)$$

Из уравнения (7) выразим скорость человека относительно поверхности воды V_2:

$$V_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}V_{21}\,.$$

Поставив в последнюю формулу численные данные в системе СИ, получим величину скорости человека относительно поверхности воды:

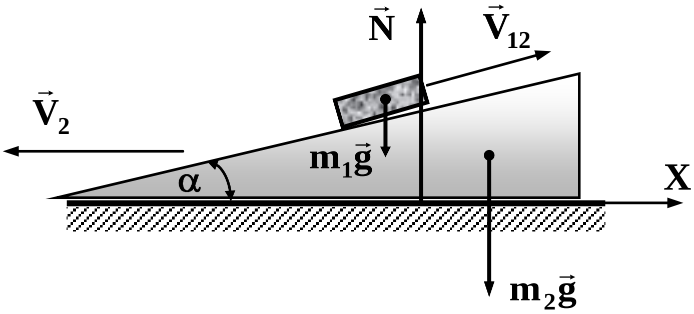
$$V_2 = \frac{180}{180 + 90}\cdot 1 = \frac{2}{3}\ м/с\,.$$

Ответ: $V_2 = \frac{2}{3}\ м/с$.

Пример 3.5 Клин массой $m_2 = 0,04\,кг$ лежит на гладком горизонтальном столе. На образующей угол $\alpha = 30^0$ с горизонтом плоскости клина сидит жук массой $m_1 = 0,01\,кг$. С какой скоростью будет двигаться клин, если жук будет ползти вверх по клину со скоростью $V_{12} = 0,01\,м/с$ относительно клина?

Решение:

Рассмотрим систему «жук — клин». На данную систему действуют внешние силы: сила тяжести жука $m_1\vec{g}$; сила тяжести клина $m_2\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Изобразим все внешние силы на рисунке. Обозначим скорость движения клина относительно Земли $\vec{V}_2$, а скорость жука относительно той же системы отсчета — $\vec{V}_1$. Запишем закон изменения импульса рассматриваемой системы за некоторый промежуток времени Δt:



$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \ m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{N}\ \ \Delta t, \qquad (1)$$

где $\vec{P}_1$– начальный импульс и $\vec{P}_2$– конечный импульс системы соответственно. По условию задачи начальный импульс равен нулю, так как система покоилась относительно Земли ($\vec{P}_1 = 0$). Конечный импульс системы равен:

$$\vec{P}_2 = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2.$$

С учетом последнего выражения, равенство (1) примет вид:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = \ m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{N}\ \ \Delta t. \qquad (2)$$

Выразив скорость жука $\vec{V}_1$ относительно Земли через его скорость относительно клина $\vec{V}_{12}$ и скорость самого клина $\vec{V}_2$ относительно Земли $\vec{V}_1 = \vec{V}_{12} + \vec{V}_2$ и, подставив в равенство (2), получим равенство:

$$m_1\ \ \vec{V}_{12} + \vec{V}_2\ \ + m_2\vec{V}_2 = \ m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{N}\ \ \Delta t.$$

Выберем горизонтально направленную ось OX. Очевидно, что проекции всех внешних сил на эту ось равны нулю. Спроектировав последнее векторное равенство на ось OX, получим уравнение:

$$m_1\ \ V_{12}\cos\alpha - V_2\ \ + m_2\ \ -V_2\ \ = 0.$$

Теперь легко выразить величину скорости V_2

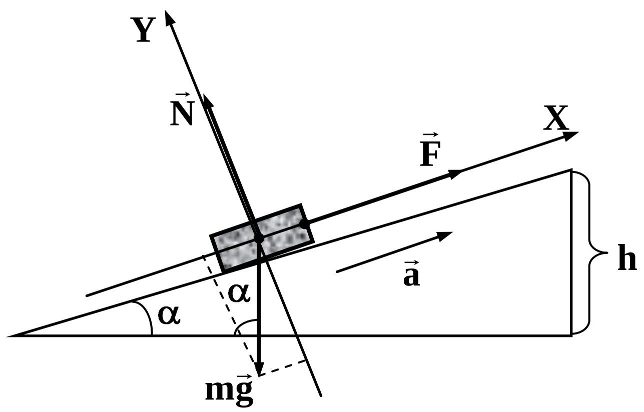
$$V_2 = \frac{m_1 V_{12}\cos\alpha}{m_1 + m_2}.$$

Подставляем исходные данные и выполняем вычисления

$$V_2 = \frac{0,01\cdot 0,01\cdot\cos 30^0}{0,01 + 0,04} = 1,73\cdot 10^{-3}\ м/с.$$

Ответ: $V_2 = 1,73\cdot 10^{-3}\ м/с$.

Пример 3.6 Какую работу совершает сила $F = 20\ Н$, подняв по наклонной плоскости груз массой $m = 2\ кг$ на высоту $h = 2{,}5\ м$ с ускорением $a = 5{,}0\ м/с^2$. Сила действует параллельно наклонной плоскости. Трением о плоскость пренебречь.



Решение:

На тело, движущееся вверх вдоль наклонной плоскости, действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$; сила реакции $\vec{N}$ и сила $\vec{F}$. Согласно условию задачи, движение тела является равноускоренным, поэтому вектор ускорения тела направлен по движению. Изобразим векторы сил на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме:

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{N} + m\vec{g}\ .$$

Выберем прямоугольную декартову систему координат, ось OX которой направим по ускорению движения тела, а ось OY — перпендикулярно поверхности наклонной плоскости. Спроектировав предыдущее векторное равенство на ось OX, получим следующее выражение:

$$ma = F - mg\sin\alpha\ . \qquad (1)$$

Из равенства (1) выражаем величину силы $\vec{F}$, получим соотношение:

$$F = ma + mg\sin\alpha\ . \qquad (2)$$

Воспользовавшись формулой для нахождения механической работы постоянной силы, и, используя равенство (2), получим выражение:

$$A = FS\cos 0^0 = \ ma + mg\sin\alpha\ \ S\ , \qquad (3)$$

где $S-$ величина перемещения тела. В данной задаче величина перемещения, равная длине наклонной плоскости, связана с высотой наклонной плоскости соотношением:

$$S = \frac{h}{\sin\alpha}\ . \qquad (4)$$

Подставим величину перемещения из равенства (4) в равенство (3), получим следующее соотношение для механической работы:

$$A = \ ma + mg\sin\alpha\ \ \frac{h}{\sin\alpha} = \frac{mah}{\sin\alpha} + mgh\ . \qquad (5)$$

В равенстве (5) остается пока неизвестной величина синуса угла наклонной плоскости. Данную величину находим из формулы (2) и, подставив в последнее равенство, получим окончательную формулу для вычисления механической работы:

$$A = \frac{ma\cdot h}{\dfrac{F - ma}{mg}} + mgh = \frac{ma\cdot h\cdot mg}{F - ma} + mgh = mgh\left(\frac{ma}{F - ma} + 1\right).$$

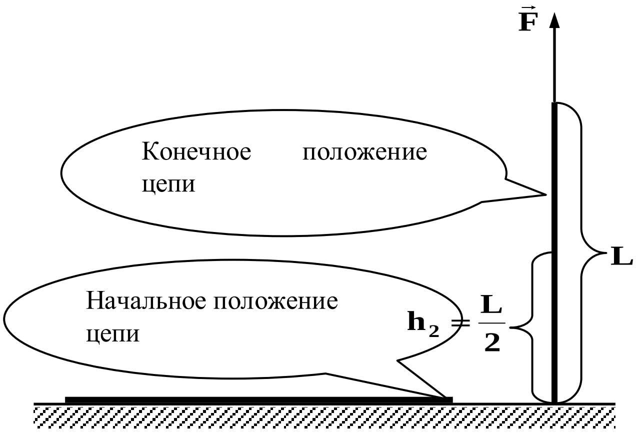
Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, найдем величину механической работы

$$A = 2\cdot 9{,}81\cdot 2{,}5\cdot\left(\frac{2\cdot 5}{20 - 2\cdot 5} + 1\right) \approx 98{,}1\ Дж\ .$$

Ответ: $A = 98{,}1\ Дж$.

Пример 3.7 Цепь массой $m = 10\,кг$ и длиной $L = 1{,}5\,м$ лежит на горизонтальной поверхности пола. Какую минимальную работу необходимо совершить, чтобы ее оторвать от поверхности пола?

Решение:



Для подъема цепи мы прикладываем такую величину внешней силы $\vec{F}$, при которой цепь поднимается с минимальной скоростью. В этом случае кинетической энергией цепи можно пренебречь. Формулу (3.11) для определения работы силы $\vec{F}$ применять нельзя, так как при подъеме увеличивается величина силы $\vec{F}$. Увеличение величины внешней силы связано с тем, что при подъеме цепи увеличивается масса цепи, оторвавшейся от горизонтальной поверхности. Поскольку подъем цепи совершается равномерно, то в любой момент времени величина внешней силы равна силе тяжести той части цепи, которая уже оторвалась от поверхности. В данной задаче мы сталкиваемся с работой переменной силы. Выразим работу этой силы через работу силы тяжести. Известно, что работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии с противоположным знаком, т.е. для данной задачи имеем следующее соотношение:

$$A_{mg} = -\left(mgh_2 - mgh_1\right),$$

где mgh_2 – конечная величина потенциальной энергии цепи; mgh_1 – начальная величина потенциальной энергии; h_2 – высота центра масс поднятой цепи над горизонтальной поверхностью; h_1 – высота центра масс цепи, лежащей на горизонтальной поверхности. Если пренебречь поперечными размерами цепи по сравнению с ее длиной, то в этом случае $h_1 = 0$. С учетом этого имеем соотношение:

$$A_{mg} = -mgh_2.$$

Поскольку в любой момент времени вектор внешней силы $\vec{F}$ направлен против вектора силы тяжести поднятой части цепи и, кроме того, величины этих сил равны, то работа внешней силы равна работе силы тяжести, взятой с противоположным знаком, т.е.:

$$A_F = -A_{mg} = mgh_2.$$

Учитывая, что высота центра масс однородной цепи равна половине ее длины, имеем окончательное равенство для определения работы внешней силы:

$$A_F = mg\frac{L}{2}.$$

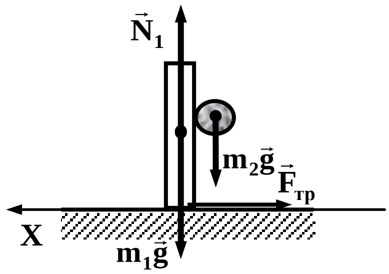
Находим величину работы:

$$A_F = 10 \cdot 9{,}8 \cdot \frac{1{,}5}{2} = 73{,}5\ Дж.$$

Ответ: $A_F = 73{,}5\ Дж$.

Пример 3.8 Фигурист массой $m_1 = 60\,кг$, стоящий на льду, ловит мяч массой $m_2 = 0,5\,кг$, летящий горизонтально со скоростью $V_2 = 20\,м/с$. На какое расстояние откатится фигурист с мячом, если коэффициент трения коньков о лед равен $\mu = 0,05$?

Решение:



На фигуриста в момент столкновения с мячом действуют силы: сила тяжести $m_1\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_1$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. На мяч в момент столкновения действует сила тяжести $m_2\vec{g}$. Изобразим все внешние силы, действующие на механическую систему «фигурист – мяч». Запишем закон изменения импульса рассматриваемой системы в течение времени столкновения Δt:

$$\Delta\vec{P} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1 = (m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр})\Delta t.$$

Спроектировав данное векторное равенство на ось OX, получим следующее равенство:

$$P_{2x} - P_{1x} = (m_1 g_x + m_2 g_x + N_x + F_{тр\,x})\Delta t.$$

Векторы $m_1\vec{g}$, $m_2\vec{g}$ и $\vec{N}_1$ перпендикулярны оси OX, поэтому проекции этих векторов на эту ось равны нулю. С учетом этого получим равенство: $P_{2x} - P_{1x} = -F_{тр}\Delta t$.

Выразив величину конечного P_2 и начального P_1 импульсов через массы тел и их скорости, и, подставив в предыдущее равенство, будем иметь соотношение:

$$(m_1 + m_2)V - m_2 V_2 = -F_{тр}\Delta t,$$

где $(m_1 + m_2)V$, $m_2 V_2$ – соответственно величина конечного и начального импульса системы.

Величина силы трения имеет конечное значение ($F_{тр} = \mu(m_1 + m_2)g$), а время взаимодействия мяча с фигуристом Δt бесконечно мало, поэтому импульсом силы трения ($F_{тр}\Delta t$) можно пренебречь. С учетом этого предположения из предыдущего равенства находим скорость системы после взаимодействия

$$V = \frac{m_2}{m_1 + m_2} V_2. \qquad (1)$$

Учитывая, что величина кинетической энергии системы в момент остановки равна нулю, запишем теорему об изменении кинетической энергии системы поле взаимодействия

$$\Delta W_k = \left(0 - \frac{(m_1 + m_2)V^2}{2}\right) = A_{F_{тр}} + A_{N_1} + A_{(m_1+m_2)g},$$

где $A_{F_{тр}}$, A_{N_1}, $A_{(m_1+m_2)g}$ – соответственно работа силы трения, силы реакции и силы тяжести. Работа двух последних сил равна нулю, так как угол между направлением этих сил и направлением вектора перемещения равен 90^0. Учитывая, что $A_{F_{тр}} = F_{тр} S \cos 180^0 = -\mu(m_1 + m_2)gS$, получим соотношение: $-\frac{(m_1 + m_2)V^2}{2} = -\mu(m_1 + m_2)gS$.

Отсюда находим величину перемещения, пройденного фигуристом до остановки: $S = \frac{V^2}{2\mu g}$.

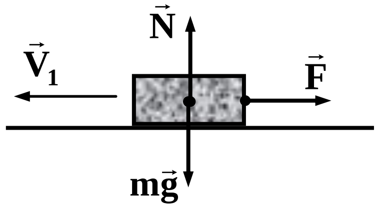
С учетом равенства (1) получим выражение для определения S:

$$S = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_1)^2} \cdot \frac{V_2^2}{2\mu g} = \frac{0,5^2}{(60 + 0,5)^2} \cdot \frac{20^2}{2 \cdot 0,05 \cdot 9,8} = 2,8 \cdot 10^{-2}\ м.$$

Ответ: $S = 2,8 \cdot 10^{-2}\ м$.

Пример 3.9 На тело массой $m = 1\,кг$, движущееся по горизонтальной поверхности со скоростью $V_1 = 1,0\ м/с$, начала действовать постоянная сила, направленная противоположно скорости тела. Найти работу этой силы к моменту времени, когда величина скорости тела после изменения направления будет в два раза больше первоначальной.

Решение:



На тело, движущееся по горизонтальной поверхности, действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и внешняя сила $\vec{F}$. Изобразим эти силы на рисунке. Запишем выражение для изменения кинетической энергии тела

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_F, \qquad (1)$$

где $\frac{mV_2^2}{2}$ - конечная кинетическая энергия тела; $\frac{mV_1^2}{2}$-начальная кинетическая энергия тела; A_{mg} – работа силы тяжести; A_N – работа силы реакции; A_F – работа внешней силы. Работа силы тяжести и силы реакции равна нулю, так как угол между векторами этих сил и вектором перемещения равен 90^0. С учетом того, что $V_2 = 2V_1$, равенство (1) примет вид:

$$\frac{m\ 2V_1\ ^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_F \Rightarrow A_F = \frac{mV_1^1}{2}.$$

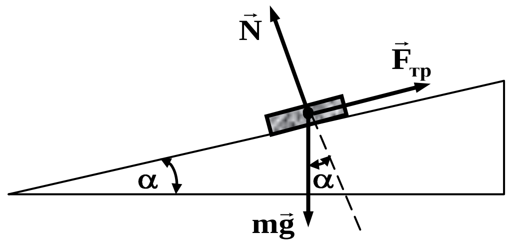
Подставив численные значения величин, входящих в последнее равенство, найдем величину работы внешней силы: $A_F = \frac{1,0 \cdot 1,0^2}{2} = 0,5\ Дж$.

Заметим, что данную задачу можно решить с помощью второго закона Ньютона. Однако решение задачи в этом случае является достаточно громоздким, так как в этом случае нам бы пришлось вычислять величины перемещений тела до и после остановки.

Ответ: $A_F = 0,5\ Дж$.

Пример 3.10 С наклонной плоскости высотой $h = 5\ м$ и углом наклона $\alpha = 30^0$ начинает двигаться тело. Скорость тела в конце наклонной плоскости равна $V_2 = 9\ м/с$. Найти коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью.

Решение:



Изобразим на рисунке все силы, действующие на тело, движущееся по наклонной плоскости. Запишем выражение для изменения кинетической энергии за все время движения тела по наклонной плоскости:

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A_{mg} + A_N + A_{F_{тр}}, \qquad (1)$$

где V_1- скорость тела в начале спуска; V_2 – скорость тела в конце наклонной плоскости. Работа силы реакции в данной задаче равна нулю, т.к. угол между вектором этой силы и вектором перемещения равен 90^0. По условию задачи, величина начальной скорости V_1 равна нулю. Используя определение механической работы, найдем работу силы тяжести и силы трения скольжения:

$$A_{mg} = mgS\cos\ 90^0 - \alpha\ = mgS\sin\alpha \quad \text{и} \quad A_{F_{тр}} = \mu mgS\cos\alpha,$$

где S – длина наклонной плоскости. Подставив полученные выражения для работ в равенство (1), получим следующее соотношение:

$$\frac{mV_2^2}{2} = mgS\sin\alpha - \mu mgS\cos\alpha \ . \qquad (2)$$

Учитывая, что $S = \dfrac{h}{\sin\alpha}$, и проведя математические преобразования, получим выражение для изменения кинетической энергии тела:

$$\frac{mV_2^2}{2} = mg\frac{h}{\sin\alpha}\sin\alpha - \mu mg\frac{h}{\sin\alpha}\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \frac{mV_2^2}{2} = mgh - \mu mghctg\,\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{V_2^2}{2} = gh - \mu ghctg\,\alpha \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{2gh - V_2^2}{ghctg\,\alpha} = \frac{2gh - V_2^2}{gh}\cdot tg\,\alpha.$$

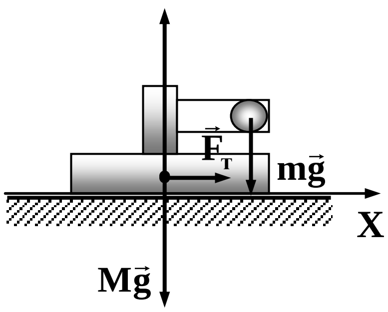
Подставив в последнее выражение числовые данные, найдем коэффициент трения:

$$\mu = \frac{2\cdot 9{,}8\cdot 5 - 9^2}{9{,}8\cdot 5}\cdot tg\,30^0 = 0{,}2.$$

Ответ: $\mu = 0{,}2$

Пример 3.11 Из орудия массой $M = 450\,кг$ вылетает снаряд массой $m = 5\,кг$ в горизонтальном направлении со скоростью $V_0 = 450\,м/с$. После выстрела орудие откатывается на расстояние $S = 0{,}45\,м$. Найти среднюю силу трения, действовавшую на орудие.

Решение:



На систему «снаряд – орудие» во время выстрела действуют следующие внешние силы: сила тяжести орудия $M\vec{g}$, сила тяжести снаряда $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_m$. Изобразим эти силы на рисунке. Запишем закон изменения импульса системы за время выстрела Δt:

$$\Delta\vec{P}_{системы} = \left(M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_m\right)\Delta t\ .$$

Направим ось ОХ по скорости снаряда. Спроектировав данное векторное равенство на эту ось, получим следующее соотношение:

$$\left(\Delta P_{системы}\right)_x = -F_m\Delta t\ .$$

Величиной импульса силы трения $F_m\Delta t$ за время выстрела можно пренебречь, поскольку время выстрела Δt является очень малой величиной $(\Delta t \approx 0)$. Поэтому изменение импульса системы равно нулю, т.е. импульс системы до и после выстрела одинаков. Начальный импульс системы равен нулю. Приравняв начальный импульс системы к конечному импульсу, получим равенство:

$$0 = mV_0 - MV_1\ . \qquad (1)$$

На орудие после выстрела действуют силы: $M\vec{g}$, $\vec{N}$ и $\vec{F}_m$. Запишем теорему об изменении кинетической энергии орудия при движении его до остановки:

$$W_2 - W_1 = A_{M\vec{g}} + A_{\vec{N}} + A_{\vec{F}_m}\ . \qquad (2)$$

Работа силы тяжести $M\vec{g}$ и силы реакции $\vec{N}$ равны нулю, так как угол между направлением этих сил и перемещением равен 90^0. Работа силы трения равна $A_{\vec{F}_m} = F_mS\cos 180^0 = -F_mS$. С учетом этого равенство (2) примет следующий вид:

$$W_2 - W_1 = -F_mS\ . \qquad (3)$$

По условию задачи конечная кинетическая энергия орудия равна нулю. Выразив величину начальной кинетической энергии орудия W_1 через его начальную скорость, и поставив в равенство (3), получим соотношение:

$$-\frac{MV_1^2}{2} = -F_m S \,. \qquad (4)$$

Найдем из равенства (1) начальную скорость орудия V_1, и подставив в равенство (4), получим выражения, из которого вычислим силу трения:

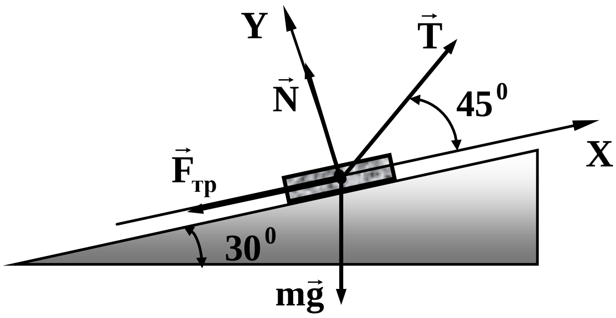
$$F_m = \frac{m^2 V_0^2}{2MS} = \frac{5^2 \cdot 450^2}{2 \cdot 0,45 \cdot 450} = 12,5 \, кН \,.$$

Ответ: $F_m = 12,5 \, кН$.

Пример 3.12 Ребенок везёт за верёвку санки массой $m = 10 \, кг$ в гору под уклон $\alpha = 30^0$ к горизонту с постоянной скоростью $V = 0,5 \, м/с$. Коэффициент трения полозьев о снег равен $\mu = 0,1$. Верёвка образует с поверхностью горы угол $\beta = 45^0$. Определить мощность, необходимую для движения санок в указанных условиях.

Решение:

На санки действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$, сила натяжения веревки $\vec{T}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Изобразим данные силы на рисунке. Запишем первый закон Ньютона в векторной форме:



$$\vec{T} + \vec{F}_{тр} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0} \qquad (1)$$

Перепишем векторное равенство (1) в проекциях на оси координат:

$$OX: \quad T\cos 45^0 - mg\sin 30^0 - F_{тр} = 0; \qquad (2)$$

$$OY: \quad T\sin 45^0 + N - mg\cos 30^0 = 0 \,. \qquad (3)$$

Из равенства (3) выражаем силу реакции и, подставляя ее в формулу для силы трения $F_{тр} = \mu N$, получим соотношение:

$$F_{тр} = \mu(mg\cos 30^0 - T\sin 45^0) \,. \qquad (4)$$

Подставим в равенство (2) вместо $F_{тр}$ правую часть равенства (4), получим выражение:

$$T\cos 45^0 - mg\sin 30^0 - \mu(mg\cos 30^0 - T\sin 45^0) \,.$$

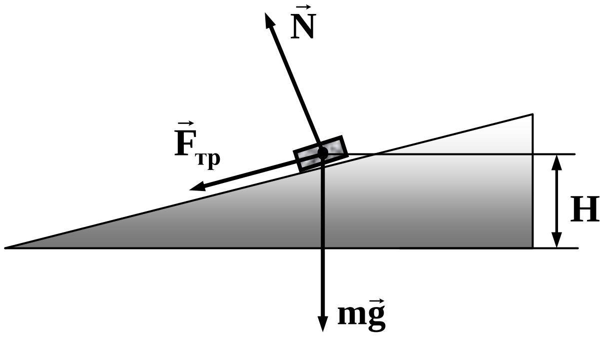
Из последнего выражения найдем величину силы натяжения и, подставив в формулу $N = TV\cos 45^0$, получим формулу для вычисления мощности

$$N = \frac{mg\sin 30^0 + \mu mg\cos 30^0}{1 + \mu tg\, 45^0} V \,.$$

Откуда $$N = \frac{10 \cdot 10 \cdot \sin 30^0 + 0,1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \cos 30^0}{1 + 0,1 \cdot tg\, 45^0} \cdot 0,5 = 26 \, Вт \,.$$

Ответ: $N = 26 \, Вт$.

Пример 3.13 Вверх по плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^0$, толкнули шайбу со скоростью $V_0 = 10\ м/с$. Коэффициент трения шайбы о плоскость равен $\mu = 0,02$. На какой высоте, относительно начальной точки, кинетическая и потенциальная энергия станут равными?



Решение:

На шайбу, движущуюся по наклонной плоскости, действуют силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$. Силы тяжести и реакции являются консервативными, а сила трения неконсервативной. Работа силы трения равна изменению полной механической энергии шайбы, т.е.:

$$W_2 - W_1 = A_{тр}, \tag{1}$$

где $W_1, W_2 -$ соответственно начальная и конечная полная механическая энергия шайбы. Учитывая, что $W_1 = \dfrac{mV_1^2}{2}$ и $W_2 = \dfrac{mV_2^2}{2} + mgH$, получим следующее соотношение:

$$\left(\frac{mV_2^2}{2} + mgH\right) - \frac{mV_1^2}{2} = A_{тр}. \tag{2}$$

По условию задачи, в некоторый момент времени кинетическая энергия шайбы $\dfrac{mV_2^2}{2}$ равна ее потенциальной энергии mgH. С учетом этого равенство (2) примет вид:

$$2mgH - \frac{mV_1^2}{2} = A_{тр}. \tag{3}$$

Найдем работу силы трения

$$A_{тр} = F_{тр}S\cos 180^0 = -F_{тр}S, \tag{4}$$

где $S -$ величина перемещения шайбы. С учетом того, что $S = \dfrac{H}{\sin\alpha}$ и $F_{тр} = \mu N = \mu mg\cos\alpha$, равенство (4) примет вид:

$$A_{тр} = -\mu mgHctg\ \alpha. \tag{5}$$

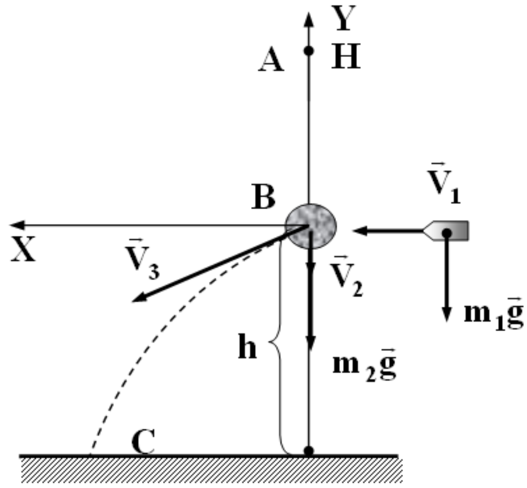
Подставив правую часть равенства (5) в равенство (3) и, сократив полученное соотношение на массу шайбы, получим соотношение для определений высоты:

$$H = \frac{V_1^2}{2g\ \ 2 + \mu ctg\ \ \alpha} = \frac{10^2}{2 \cdot 9,8 \cdot\ \ 2 + 0,02 \cdot ctg\ \ 30^0} = 2,5\ \ м$$

Ответ: $H = 2,5\ \ м$.

Пример 3.14 С высоты $H = 40\,м$ свободно падает шар массой $m_2 = 0{,}1\,кг$. Когда шар находится на высоте $h_1 = 20\,м$, в него попадает пуля, летевшая горизонтально со скоростью $V_1 = 100\,м/с$. Масса пули $m_1 = 0{,}01\,кг$. Найти скорость шара при падении на землю, зная, что пуля застряла в нём. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:



На систему «шар — пуля» во время удара действуют внешние силы: сила тяжести шара $m_2\vec{g}$ и сила тяжести пули $m_1\vec{g}$. Запишем закон изменения импульса системы в течение времени столкновения Δt:

$$\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = \ m_1\vec{g} + m_2\vec{g}\ \ \Delta t\,, \qquad (1)$$

где $\vec{P}_1, \vec{P}_2 -$ начальный и конечный импульс системы соответственно.

Так как время столкновения является очень малой величиной $(\Delta t \approx 0)$, то отсюда следует, что $\vec{P}_2 - \vec{P}_1 = 0$. Последнее равенство гласит, что импульс системы до и после взаимодействия одинаков, т.е. $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$. Обозначим скорость пули до взаимодействия $\vec{V}_1$, скорость шара до взаимодействия $\vec{V}_2$ и скорость системы «шар — пуля» после взаимодействия $\vec{V}_3$. Запишем закон сохранения импульса в векторной форме:

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = \ m_1 + m_2\ \ \vec{V}_3\,, \qquad (2)$$

где $m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2$ – импульс системы до взаимодействия, $m_1 + m_2\ \ \vec{V}_3 -$ импульс системы после взаимодействия. Спроектировав векторное равенство (2) на оси OX и OY, получим следующие соотношения:

$$OX: \quad m_1V_1 = \ m_1 + m_2\ \ V_{3_x}\,,$$

$$OY: \quad -m_2V_2 = \ m_1 + m_2\ \ V_{3_y}\,. \qquad (3)$$

Выразив из полученных равенств V_{3_x}, V_{3_y} и, подставив в равенство $V_3 = \sqrt{V_{3_x}^2 + V_{3_y}^2}$, получим соотношение:

$$V_3 = \sqrt{\left(\frac{m_1V_1}{m_1 + m_2}\right)^2 + \left(\frac{-m_2V_2}{m_1 + m_2}\right)^2}\ . \qquad (4)$$

На участке АВ на шар действует только его сила тяжести $m_2\vec{g}$, которая является консервативной, поэтому механическая энергия шара на этом участке остается постоянной. Приравняем полную механическую энергию шара в точке **A** (m_2gH) и полную механическую энергию шара в точке **B** $\left(m_2gh + \dfrac{m_2V_2^2}{2}\right)$, получим следующее равенство:

$$m_2gH = m_2gh + \frac{m_2V_2^2}{2}. \qquad (5)$$

Выразив из равенства (5) величину скорости V_2 и, подставив в равенство (4), получим соотношение:

$$V_3=\sqrt{\left(\frac{m_1V_1}{m_1+m_2}\right)^2+\left(\frac{m_2\sqrt{2g\;\;H-h}}{m_1+m_2}\right)^2}\;. \qquad (6)$$

На участке траектории **BC** на систему «шар — пуля» действует сила тяжести $m_1+m_1\;\;\vec{g}$, которая является консервативной, поэтому на этом участке выполняется закон сохранения полной механической энергии. Приравняв полную механическую энергию в точках **B** и **C**, получим следующее выражение:

$$m_1+m_2\;\;gh+\frac{m_1+m_2\;\;V_3^2}{2}=\frac{m_1+m_2\;\;V_4^2}{2}\,, \qquad (7)$$

где V_4 - скорость системы в момент падения на землю.

Из данного равенства выразим скорость V_4:

$$V_4=\sqrt{V_3^2+2gh}\,. \qquad (8)$$

Подставив в равенство (8) вместо V_3 правую часть соотношения (6), получим формулу для вычисления скорости системы в момент падения на землю:

$$V_4=\sqrt{\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2V_1^2+\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2\cdot\left[2g\;\;H-h\;\;\right]+2gh}\,. \qquad (9)$$

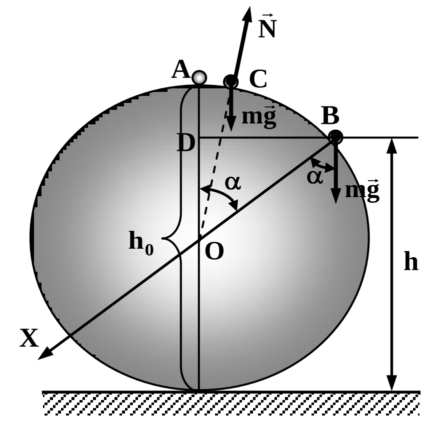
Подставив численные значения величин, входящих в последнее соотношение, найдем величину скорости V_4:

$$V_4=\sqrt{\left(\frac{0,01}{0,01+0,1}\right)^2\cdot 100^2+\left(\frac{0,1}{0,01+0,1}\right)^2\cdot\left[2\cdot 9,8\cdot\;\;40-20\;\;\right]+2\cdot 9,8\cdot 20}=28,3\;м/с\;.$$

Ответ: $V_4=28,3\;м/с$.

Пример 3.15 На вершине сферы радиусом $R=3\,м$ лежит тело малых размеров. От небольшого толчка тело приходит в движение. Определить высоту относительно поверхности земли, на которой тело оторвется от поверхности сферы. Силой трения тела о поверхность сферы пренебречь.

Решение:



Пусть в точке **B** происходит отрыв тела от поверхности сферы. В произвольной точке **C** на тело действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. Обе силы являются консервативными, поэтому полная механическая энергия тела на участке **AB** постоянна. Запишем закон сохранения полной механической энергии для точек **A** и **B**:

$$mgh_0+\frac{mV_0^2}{2}=mgh+\frac{mV^2}{2} \qquad (1)$$

С учетом того, что $V_0=0$ и $h_0=2R$, преобразуем предыдущее равенство к следующему виду:

$$mg2R=mgh+\frac{mV^2}{2}\,. \qquad (2)$$

В точке отрыва тела от поверхности сферы на него действует только сила тяжести. Запишем второй закон Ньютона в точке **B** в проекции на ось OX:

$$ma_ц=mg\cos\alpha\,. \qquad (3)$$

Подставим в равенство (3) вместо $a_ц = \dfrac{V^2}{R}$, получим соотношение:

$$m\frac{V^2}{R} = mg\cos\alpha\,. \tag{4}$$

Из треугольника ODB находим $\cos\alpha$ и, подставив в равенство (4), имеем следующее соотношение:

$$m\frac{V^2}{R} = mg\frac{h-R}{R} \Rightarrow V^2 = g\,(h-R)\,. \tag{5}$$

Из полученного равенства найдем V^2 и поставим это выражение в равенство (2), получим уравнение для высоты h:

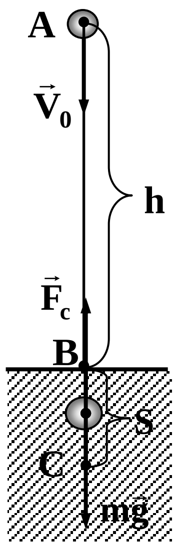
$$mg2R = mgh + \frac{mg(h-R)}{2}\,. \tag{6}$$

Сократив в последнем уравнении mg и, решив полученное уравнение относительно h, получим формулу для вычисления высоты: $h = \dfrac{5}{3}\cdot R = \dfrac{5}{3}\cdot 3 = 5\ м$.

Ответ: $h = 5\ м$.

Пример 3.16 Тело массой $m = 2\ кг$, брошенное вертикально вниз с высоты $h = 250\ м$ со скоростью $V_0 = 20\ м/с$, углубилось в песок на расстояние $S = 0,2\ м$. Найти среднюю силу сопротивления песка. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение:



На участке **BC** на тело действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила сопротивления песка $\vec{F}_c$. Сила тяжести является консервативной, а сила сопротивления неконсервативной. Работа силы $\vec{F}_c$ на этом участке траектории равна изменению полной механической энергии тела, т.е.:

$$W_C - W_B = A_{F_c}\,. \tag{1}$$

С учетом того, что полная механическая энергия тела в точке **C** равна нулю ($W_C = 0$), а в точке **B** — $W_B = \dfrac{mV_1^2}{2}$ величина механической работы вычисляется по формуле $A_{F_c} = -F_cS$, равенство (1) примет вид:

$$-\frac{mV_1^2}{2} = -F_cS\,. \tag{2}$$

На участке **AB** на тело не действуют неконсервативные силы, поэтому на этом участке полная механическая энергия тела постоянна. Приравняв полную механическую энергию в точке **A** к энергии в точке **B**, получим следующее соотношение:

$$\frac{mV_0^2}{2} + mgh = \frac{mV_1^2}{2}\,. \tag{3}$$

Подставив в равенство (2) вместо $\dfrac{mV_1^2}{2}$ правую часть равенства (3) и, выразив величину силы сопротивления, получим следующую формулу:

$$F_c = \frac{mV_0^2}{2S} + \frac{mgh}{S}\,. \tag{4}$$

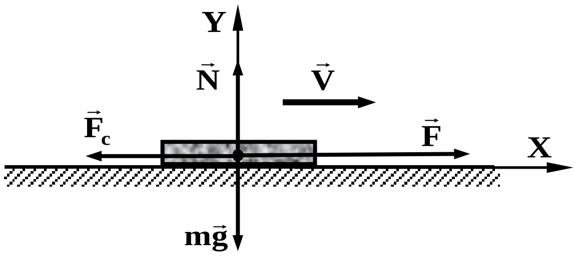
Подставив в последнюю формулу численные значения, найдем величину силы сопротивления:

$$F_c = \frac{2\cdot 20^2}{2\cdot 0,2} + \frac{2\cdot 9,8\cdot 250}{0,2} = 26\,500\ Н\,.$$

Заметим, что величина сила сопротивления песка не изменится, если тело бросить вертикально вверх с той же начальной скоростью. ***Ответ:*** $F_c = 26\,500\ H$.

Пример 3.17 Для взлета самолет массой $m = 1000\ кг$ должен иметь скорость не менее $V = 90\ км/ч$. Какую минимальную мощность должен иметь мотор, чтобы этот самолет мог взлететь с полосы длиной $S = 100\ м$, если во время разгона он движется равноускоренно, преодолевая силу сопротивления $F_c = 2000\ H$?

Решение:



На самолет во время разгона действуют следующие силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}$, сила тяги мотора самолета $\vec{F}$ и сила сопротивления $\vec{F}_c$. Изобразим все силы на рисунке.

Для определения работы силы тяги мотора используем теорему об изменении кинетической энергии самолета. Учитывая, что начальная кинетическая энергия самолета равна нулю, запишем соотношение для изменения кинетической энергии:

$$\frac{mV^2}{2} - 0 = A_F + A_{Fc} + A_N + A_{mg}.$$

Работа силы тяжести A_{mg} и силы реакции A_N равна нулю, так как направление этих сил перпендикулярно направлению вектора перемещения. Из последнего равенства выразим работу силы тяги A_F:

$$A_F = \frac{mV^2}{2} - A_{F_c}. \qquad (1)$$

Выразим работу силы сопротивления A_{F_c} через силу и перемещение:

$$A_{F_c} = F_c S \cos 180^0 = -F_c S. \qquad (2)$$

Подставим в равенство (1) вместо A_{F_c} правую часть равенства (2), получим следующее соотношение:

$$A_F = \frac{mV^2}{2} + F_c S. \qquad (3)$$

Учитывая то, что $A_F = FS\cos 0^0 = FS$ и, используя равенство (3), находим величину силы тяги мотора:

$$F = \frac{\frac{mV^2}{2} + F_c S}{S} = \frac{mV^2}{2S} + F_c.$$

Находим мощность мотора в момент взлета по формуле:

$$N = FV\cos 0^0 = \left(\frac{mV^2}{2S} + F_c\right)V. \qquad (4)$$

Подставив в равенство (4) численные значения в системе СИ, найдем мгновенную мощность при взлете:

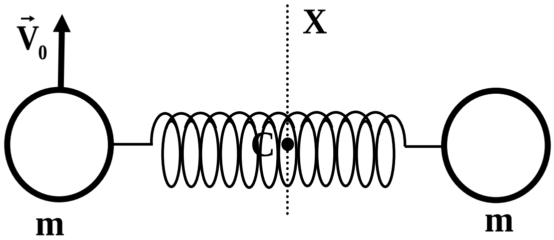
$$N = \left(\frac{1000\cdot 25^2}{2\cdot 100} + 2000\right)\cdot 25 = 1{,}28\cdot 10^5\ Вт.$$

Полученная величина мощности является минимальной мощностью мотора, так как при решении задачи предполагалось, что потери, связанные с различными силами трения в моторе и других узлах самолета, отсутствуют. ***Ответ:*** $N_{\min} = 1{,}28\cdot 10^5\ Вт$.

Задача 3.18. На гладкой горизонтальной плоскости лежат две небольшие шайбы, каждая массой m, которые соединены между собой пружинкой. Одной из шайб сообщили начальную скорость V_0. Найти механическую энергию вращательного и колебательного движений этой системы .

Решение:

На систему во время движения действуют следующие внешние силы: $m_1\vec{g},\ m_2\vec{g}$ – соответственно сила тяжести первого и второго шарика; $\vec{N}_1, \vec{N}_2$ – силы реакций первого и второго шарика. При установившемся движении центр масс этой системы будет совершать прямолинейное равномерное движение со скоростью $\vec{V}_C$, и кроме того, шарики будут совершать вращательное и колебательное движения около центра масс.



Так как сумма внешних сил равна нулю, то для нахождения скорости центра масс воспользуемся законом сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_0 = m_1 + m_2\ \vec{V}_C \quad \Rightarrow \quad m_1V_{0_x} = m_1 + m_2\ V_{C_x} \quad \Rightarrow \quad V_{C_x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\ V_{0_x}.$$

Учитывая что $m_1 = m_2 = m$, $V_{0_x} = V_0$ и $V_{C_x} = V_C$, получим следующее выражение для скорости центра масс: $V_C = \frac{V_0}{2}$.

Находим кинетическую энергию поступательного движения системы

$$W_1 = \frac{(m_1 + m_2)V_C^{\ 2}}{2} = \frac{2m\left(\frac{V_0}{2}\right)^2}{2} = \frac{mV_0^{\ 2}}{4}.$$

На систему во время движения действуют консервативные силы $m_1\vec{g},\ m_2\vec{g}$ и сила упругости пружины, а также силы реакций $\vec{N}_1, \vec{N}_2$, причём работа последних сил равна нулю, поэтому полная механическая энергия рассматриваемой системы будет постоянной во время её движения. Запишем закон сохранения полной механической энергии для этой системы:

$$\frac{mV_0^{\ 2}}{2} = W_1 + W_2, \qquad (1)$$

где W_2 – представляет собой механическую энергию колебательного и вращательного движения системы. Заметим, что механическая энергия колебательного движения представлена суммой кинетической и потенциальной энергии.

Из равенства (1) находим искомую энергию W_2

$$W_2 = \frac{mV_0^{\ 2}}{2} - W_1 = \frac{mV_0^{\ 2}}{2} - \frac{mV_0^{\ 2}}{4} = 0,75mV_0^{\ 2}.$$

Ответ: $W_2 = 0,75mV_0^{\ 2}$.

Задачи для самостоятельной работы

Задача 3.1 С какой наименьшей высоты h должен начать скатываться акробат на велосипеде (не работая ногами), чтобы проехать по дорожке, имеющей форму «мертвой петли» радиусом 4 м, и не оторваться от дорожки в верхней точке петли? Трением пренебречь. ***Ответ:*** $h=\frac{5}{2}R=10\,м$.

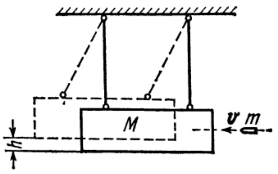
Задача 3.2 Материальная точка массой 1000 г, двигаясь равномерно, описывает четверть окружности радиусом 120 см в течение времени 2 с. Найти изменение импульса точки.
Ответ: $\Delta p=1.33\ Н\cdot с$.

Задача 3.3 Материальная точка массой 2 кг двигалась под действием некоторой силы, направленной вдоль оси Ох согласно уравнению x = A+Bt+Ct^2+Dt^3, где B = — 2 м/с, C = 1 м/с2, D = — 0,2 м/с3. Найти мощность N, развиваемую силой в момент времени $t_1 = 2$ с и $t_2 = 5$ с. ***Ответ:*** $N_1=0.32\ Вт$**;** $N_2=56\ Вт$.

Задача 3.4 Под действием постоянной силы F вагонетка прошла путь s = 5 м и приобрела скорость 2 м/с. Определить работу A силы, если масса вагонетки равна 400 кг и коэффициент трения 0,01. ***Ответ:*** $A=996\ Дж$.

Задача 3.5 Пружина жесткостью $к$ = 10^4 Н/м сжата силой 200 Н. Определить работу внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружину еще на 1 см.
Ответ: $A=2.5\ Дж$.

Задача 3.6 Пуля массой $m=10\,г$, летящая со скоростью 600 м/с, попала в баллистический маятник массой M = 5 кг (см. рис) и застряла в нём. На какую высоту поднимется маятник после попадания пули?



Ответ: $h=\frac{m^2v^2}{2gM}=7.34\,см$.

Задача 3.7 Шар массой 6 кг движется со скоростью 2 м/с и сталкивается с шаром массой 4 кг, который движется ему на встречу со скоростью 5 м/с. Найдите скорость шаров после прямого центрального удара. Шары считать абсолютно неупругими. ***Ответ:*** $v=0.8\frac{м}{с}$.

Задача 3.8 На железнодорожной платформе установлено орудие. Орудие жестко скреплено с платформой. Масса платформы и орудия M = 15 т. Орудие производит выстрел под углом $\alpha = 60°$ к линии горизонта в направлении пути. Какую скорость v_1 приобретает платформа с орудием вследствие отдачи, если масса снаряда 20 кг и он вылетает из канала ствола со скоростью v_2 = 600 м/с относительно Земли? ***Ответ:*** $v=0.4\frac{м}{с}$.

Задача 3.9 Камень брошен вверх под углом $\varphi = 60°$ к плоскости горизонта. Кинетическая энергия T_0 камня в начальный момент времени равна 20 Дж. Определить кинетическую T и потенциальную $П$ энергии камня в высшей точке его траектории. Сопротивлением воздуха пренебречь. ***Ответ:*** $T=5\,Дж$; $П=15\,Дж$.

Задача 3.10 Тело массой m = 5 кг брошено под углом $\alpha = 30°$ к горизонту с начальной скоростью v_0 = 20 м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, найти: 1) импульс силы $F\cdot t$, действующей на тело, за время его полета; 2) изменение Δp импульса тела за время полета.
Ответ: $Ft=100Н\cdot с$; $\Delta p=100Н\cdot с$.