

## 8. ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

### § 8.1 Основные законы магнитостатики

#### 8.1.1 Основные свойства магнитного поля

**Магнитное поле** - одна из форм электромагнитного поля. Оно создаётся **движущимися** электрическими зарядами и действует только на **движущиеся** заряды. Поскольку электрический ток есть упорядоченное движение свободных носителей электрического заряда в проводниках, то можно также утверждать, что **электрический ток** создаёт в окружающем проводник пространстве магнитное поле, которое в свою очередь может действовать на другие проводники с током. В результате между такими проводниками возникает взаимодействие. Материальной средой, благодаря которой возникает такое взаимодействие, как раз и является магнитное поле.

Силовой характеристикой магнитного поля, как опытно было установлено Эрстедом, служит векторная величина  $\vec{B}$ , называемая **магнитной индукцией**. Силовое действие магнитного поля, определённого в каждой точке пространства индукцией  $\vec{B}$  проявляется в возникновении вращающего механического момента  $M$ , действующего на магнитную стрелку, помещённую в той или иной точке пространства. В состоянии равновесия магнитная стрелка ориентируется в направлении вектора  $\vec{B}$ . Размещая множество магнитных стрелок, к примеру, на плоскости перпендикулярной к проводу, по которому протекает ток (рис 8.1), получим совокупность различных ориентаций магнитных стрелок. Если теперь все близко расположенные точки на этой плоскости соединить непрерывной линией, то окажется, что такая линия всегда есть замкнутая кривая, охватывающая проводник с током. Эту замкнутую кривую называют **линией магнитной индукции**. На ней указывается направление ориентации магнитной стрелки, которое остаётся неизменным вдоль всей линии.

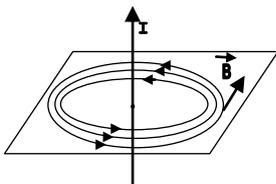


Рис. 8.1

Вектор  $\vec{B}$  в любой точке линии магнитной индукции будет направлен по касательной к ней. Таким образом, опытным путём было установлено графически отображаемое свойство магнитного поля – линии магнитной индукции всегда есть замкнутые, непересекающиеся кривые. В этом состоит их принципиальное отличие от силовых линий напряжённости электростатического поля, которые начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных зарядах. Замкнутость линий магнитной индукции означает, что в природе не существует “магнитных зарядов”, на которых бы они начинались или заканчивались. Поле, удовлетворяющее этому условию, называют **вихревым**.

Графически величину индукции  $\vec{B}$  можно оценить по густоте линий магнитной индукции, пересекающих малую площадь  $\Delta S_{\perp}$ , ориентированную перпендикулярно к ним. Чем больше число линий  $\vec{B}$  пересекает такую площадь, размещённую в различных областях пространства, тем больше величина индукции  $\vec{B}$ . В ограниченной области пространства линии индукции можно считать параллельными прямыми, тогда для этой области густота линий индукции практически не меняется, т.е.  $|\vec{B}| = \text{const}$ . Говорят, что такое поле является в пределах выбранной области однородным. В общем случае магнитное поле всегда неоднородно, для разных точек пространства индукция  $\vec{B}$  различна, как по величине, так и по направлению.

Для магнитного поля, так же как и для электрического, выполняется **принцип суперпозиции**: результирующая индукция  $\vec{B}$  поля в некоторой точке пространства равна

векторной сумме индукций  $\vec{B}_i$ , создаваемых в данной точке отдельными источниками (токами)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \dots + \vec{B}_n = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (8.1)$$

### 8.1.2 Закон Био – Савара – Лапласа

На основе принципа суперпозиции может быть определена индукция магнитного поля от совокупности множества источников поля, если бы удалось установить закон, определяющий индукцию поля от некоторого элементарного источника. Таковым может быть принят точечный заряд  $q$ , движущийся с известной скоростью  $\vec{v}$ , или бесконечно малый элемент проводника  $d\vec{l}$ , по которому течёт ток силой  $I$ .

Такой закон был установлен опытным путём в 1820 г французскими учёными Био и Саваром и теоретически сформулирован Лапласом, названный впоследствии законом Био – Савара - Лапласа.

В качестве элементарного источника магнитного поля берётся элемент проводника длиной  $d\vec{l}$ , которому присваивается векторное направление  $d\vec{l}$ , совпадающее с направлением тока  $I$  в этом элементе (рис. 8.2). Положение точки  $M$ , в которой определяется индукция  $d\vec{B}$ , задаётся радиус-вектором  $\vec{r}$ , проведённым из начала элемента  $d\vec{l}$  в точку  $M$ . Тогда в соответствии с законом Био-Савара-Лапласа элементарное значение индукции  $d\vec{B}$  в точке  $M$ , созданное элементом тока  $I d\vec{l}$  равно

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (8.2)$$

Вектор  $d\vec{B}$  перпендикулярен плоскости, в которой расположены перемножаемые векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$ , и направлен за чертёж (обозначено  $\otimes$ ), чему удовлетворяет правило правого винта – поворачивая  $d\vec{l}$  в направлении к  $\vec{r}$  по наименьшему углу поворота винт поступательно перемещается (вкручивается) в плоскость чертежа. Этому направлению перемещения и соответствует направление вектора  $d\vec{B}$ .

В формуле (8.2)  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_{\text{H}}}{\text{м}}$  - магнитная постоянная.

Из закона (8.2) и рис. 8.2 следует, что для всех точек, удалённых от проводника с током на одинаковое расстояние  $a$  при фиксированном положении элемента  $d\vec{l}$  ( $\alpha$  неизменно), величина индукции  $d\vec{B}$  остаётся неизменной

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha \quad (8.3)$$

Поэтому линия индукции для некоторого значения  $a$  будет всегда окружностью того же радиуса с центром на оси тока. Кроме того, также следует, что для некоторой фиксированной точки  $M$  направление вектора  $d\vec{B}$  в этой точке не зависит от положения элемента  $d\vec{l}$  на оси прямолинейного тока. Поэтому при использовании принципа суперпозиции для определения индукции поля от множества элементов проводника с током  $I$  можно индукции  $d\vec{B}$  складывать алгебраически, выражая суммирование интегрированием по всей длине проводника на основании скалярного соотношения (8.3)

$$B = \int_L d\vec{B} = \int_L \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{r^2} \sin \alpha. \quad (8.4)$$

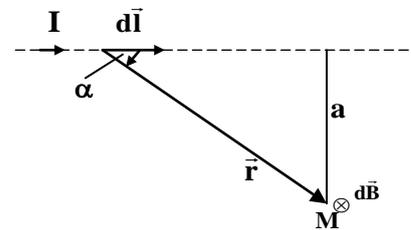


Рис. 8.2

Тогда для выделенного участка  $L$  прямолинейного проводника (рис. 8.3) на основании

$$(8.4) \text{ можно получить следующую формулу } B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (8.5)$$

В ней углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , отсчитываемые от направления тока  $I$  в направлении линий, соединяющих точку  $M$  с началом и концом участка  $L$ , однозначно определяют заданное положение этой точки по отношению к отрезку  $L$ .

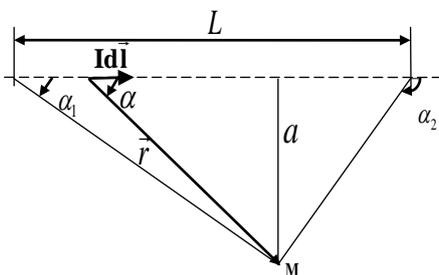


Рис. 8.3

Формулу (8.5) легко применить к разным частным случаям. Например, определим индукцию магнитного поля  $B$ , создаваемую током  $I$  в бесконечном проводе, на расстоянии  $a$  от него. Так как провод бесконечен, то  $\alpha_1 = 0^\circ$  (элемент  $d\vec{l}$  расположен в бесконечно удалённой точке слева от точки  $M$ ) и  $\alpha_2 = \pi$  (элемент  $d\vec{l}$  находится в бесконечном удалении от  $M$  справа), следовательно  $\cos \alpha_1 = 1$ ,  $\cos \alpha_2 = -1$ , в результате получим

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{a} \quad (8.6)$$

Если провод полубесконечен (точка  $M$  находится против начала такого провода), то  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$  и  $\alpha_2 = \pi$ ; соответственно,  $\cos \alpha_1 = 0$  и  $\cos \alpha_2 = -1$ , тогда индукция станет равной

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{a}. \quad (8.7)$$

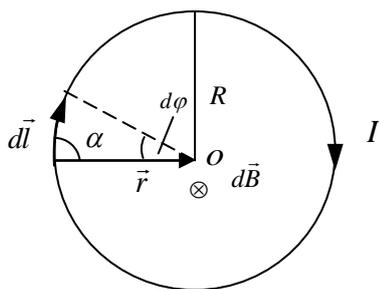


Рис. 8.4

Она оказалась в 2 раза меньше, чем в предыдущем случае бесконечного провода. Такой результат вполне объясним и понятен, поскольку количество источников поля здесь стало вдвое меньше.

Теперь рассмотрим кольцевой (круговой) ток  $I$ , текущий по витку провода радиусом  $R$  (рис. 8.4). Здесь мы вправе применить выражение (8.4) для определения индукции поля в центре  $O$  витка. Из рисунка видно, что угол  $\alpha$  между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  при любом положении  $d\vec{l}$  на окружности

витка равен  $\frac{\pi}{2}$ , поэтому в формуле (8.4)  $\sin \alpha = 1$ , а модуль  $|\vec{r}| = R = \text{const}$ . Следовательно, можно переписать (8.4) в виде

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{R^2} \int_L dl.$$

Но  $\int_L dl = 2\pi R$  т.е. это есть длина окружности, следовательно

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot 2\pi R}{R^2} = \mu_0 \frac{I}{2R}. \quad (8.8)$$

Для плоского замкнутого контура, по которому течёт ток  $I$ , вводится понятие *магнитного момента*  $p_m = IS$ , где  $S$  - площадь такого контура. Применительно к рассмотренному витку с током его магнитный момент  $p_m = I\pi R^2$  и тогда индукция магнитного поля в центре витка записывается в виде

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2p_m}{R^3}. \quad (8.9)$$

Индукция  $B$  на оси кругового тока на расстоянии  $r$  от плоскости контура равна

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2p_m}{(R^2 + r^2)^{3/2}}. \quad (8.10)$$

На больших расстояниях от контура величиной  $R^2$  можно пренебречь по сравнению с  $r^2$ , тогда

$$B \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2p_m}{r^3}. \quad (8.11)$$

Общей формулой, выражающей индукцию поля  $B$  в направлениях, отличных от направления по оси витка, служит выражение (при  $r \gg R$ )

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{p_m}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \alpha}, \quad (8.12)$$

где  $\alpha$  - угол между осью витка и направлением от центра витка до точки, удалённой от него на расстояние  $r$ . С точностью до постоянного множителя эта формула совпадает с соответствующим выражением для напряженности  $E$  электрического поля, создаваемого электрическим диполем  $p_e$ . Поэтому плоский контур, размеры которого малы ( $R \ll r$ ), был назван **магнитным диполем**, которому подобно электрическому диполю присвоено направление, задаваемое единичной нормалью  $\vec{n}$ , т.е. магнитный момент диполя как векторная величина есть

$$\vec{p}_m = IS\vec{n}. \quad (8.13)$$

Направление вектора  $\vec{p}_m$  (или  $\vec{n}$ ) должно удовлетворять правилу правого винта (рис. 8.5) – если правый винт вращать в направлении тока, то поступательное движение винта укажет направление вектора  $\vec{p}_m$ . Точечный магнитный диполь, имеющий магнитный момент  $\vec{p}_m$ , может рассматриваться как элементарный источник магнитного поля, свойства которого определены исключительно направлением и величиной магнитного момента. Структура линий индукции  $\vec{B}$  от магнитного диполя подобна силовым линиям электрического диполя. Примером точечного магнитного диполя может служить электрон атома вещества, вращающийся по круговой орбите вокруг ядра атома с некоторой угловой скоростью  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$ -период обращения. Такому орбитальному движению соответствует

кольцевой ток  $I = \frac{e}{T}$  ( $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона). Поэтому магнитный момент этого

тока  $p_m = IS = \frac{e}{T} \pi r^2$  и т.к. скорость вращения электрона  $v = \frac{2\pi r}{T}$ , где  $r$  – радиус орбиты,

то  $p_m = \frac{evr}{2}$ . Так как электрон обладает массой, то орбитальному движению электрона вокруг ядра атома соответствует момент импульса  $L = mvr$ . Отношение этих двух моментов – магнитного и механического - называется гиромагнитным отношением

$$g = \frac{p_m}{L} = \frac{1}{2} \frac{e}{m}.$$

Атомную систему электрон-ядро можно уподобить волчку. Это свойство лежит в основе так называемых магнитомеханических явлений, заключающихся в том, что намагничивание магнетика приводит к его вращению, и наоборот, вращение магнетика приводит к его намагничиванию. Эти любопытные эффекты были подтверждены экспериментально.

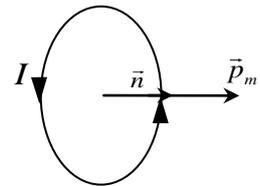


Рис. 8.5

### 8.1.3 Сила Лоренца и сила Ампера. Взаимодействие проводников с током

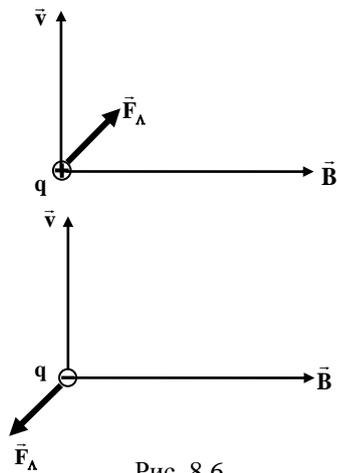


Рис. 8.6

Опыт показывает, что на заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле действует сила, зависящая от величины и знака заряда  $q$  частицы, её скорости  $\vec{v}$  и магнитной индукции  $\vec{B}$ . Эта сила получила название **силы Лоренца**:

$$F_{\Lambda} = qvB \sin \alpha. \quad (8.14)$$

где  $\alpha$  - угол между вектором скорости  $\vec{v}$  и вектором индукции  $\vec{B}$ . Это выражение может быть записано в векторной форме

$$\vec{F}_{\Lambda} = q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (8.15)$$

Для положительного заряда направление вектора силы Лоренца  $\vec{F}_{\Lambda}$  определяется правилом правого винта, для отрицательно – левого винта (рис. 8.6). Сила Лоренца всегда перпендикулярна вектору скорости частицы  $\vec{F}_{\Lambda} \perp \vec{v}$ , поэтому

она работы не совершает и, следовательно, энергию частицы изменить не может.

При наличии электрического поля  $\vec{E}$  помимо магнитного поля на частицу действует и электрическая сила, следовательно:

$$\vec{F}_{\Lambda} = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}]. \quad (8.16)$$

Здесь первое слагаемое есть электрическая составляющая, а второе – магнитная составляющая силы Лоренца, действующей на заряд  $q$ , движущийся в электромагнитном поле. Записанное соотношение в общем случае выражает фундаментальный закон физики для электромагнитных явлений, т.е. этот закон определяет, как электромагнитное поле действует на заряженные частицы.

Рассмотрим действие электромагнитного поля на некоторое распределение зарядов, заданных объёмной плотностью зарядов  $\rho = dq/dV$  и плотностью тока  $\vec{j} = I/S_{\perp}$ . Пусть заряд сосредоточен в бесконечно малом объёме  $dV$ , тогда его величина  $dq = \rho dV$  и такой заряд рассматривается как точечный. Его скорость движения равна  $\vec{v}$ . Тогда сила, действующая на него

$$d\vec{F}_{\Lambda} = \vec{E} \rho dV + \rho[\vec{v} \times \vec{B}] dV = \{\rho \vec{E} + [\vec{j} \times \vec{B}]\} dV. \quad (8.17)$$

В этом выражении  $\rho \vec{v} = \vec{j}$ , т.к. в выделенном объёме  $dV = S_{\perp} dl$  через его поперечное сечение  $S_{\perp}$  в направлении тока за время  $dt$  переносится заряд  $dq = j S_{\perp} dt$ .

Второе слагаемое в правой части формулы (8.17) характеризует действие магнитного поля на токи с плотностью  $\vec{j}$ , оно получило название силы Ампера

$$d\vec{F}_{\Lambda} = [\vec{j} \times \vec{B}] dV. \quad (8.18)$$

Определим, например, силу Ампера, действующую на элемент тока  $I d\vec{l}$ , протекающего в проводнике с поперечным сечением  $S_{\perp}$ . Для элемента длины  $dl$  проводника его объём  $dV = S_{\perp} dl$  и тогда

$$d\vec{F}_{\Lambda} = [\vec{j} \times \vec{B}] S_{\perp} \cdot dl$$

Так как векторы  $d\vec{l}$  и  $\vec{j}$  направлены в одну сторону, то можно заменить  $\vec{j} dl$  на  $j d\vec{l}$ , и учитывая, что  $\vec{j} = \frac{I}{S_{\perp}}$ , получим

$$d\vec{F}_{\Lambda} = I[d\vec{l} \times \vec{B}] \quad (8.19)$$

Это есть так называемый закон Ампера, выражающий величину и направление силы Ампера, действующий на элемент проводника с током  $I d\vec{l}$ , помещённый в магнитное поле с

индукцией  $\vec{B}$ . Эта сила, если проводник под её действием совершает перемещение, будет совершать работу. Благодаря ей между проводниками, по которым текут электрические токи, возникает взаимодействие.

Рассмотрим, к примеру, два параллельных прямолинейных провода с токами  $I_1$  и  $I_2$  (рис. 8.7). Выделим на каждом из них участки единичной длины, тогда следует, что по закону Ампера на первый из них действует сила  $F_{12\text{ед}} = I_1 B$ , а на второй  $-F_{21\text{ед}} = I_2 B_1$ . Здесь  $B_2$  - индукция поля в месте расположения первого проводника, создаваемая вторым, а  $B_1$  - индукция поля от первого проводника в месте расположения второго. В соответствии с формулой (8.6) они равны

$$B_2 = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{2I_2}{a}; \quad B_1 = \frac{\mu_0}{\pi} \cdot \frac{2I_1}{a}.$$

Подставляя эти значения в формулу для силы Ампера, получим

$$F_{12\text{ед}} = -F_{21\text{ед}} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{a} \quad (8.20)$$

Как видно из рис. 8.8, силы взаимодействия в рассматриваемом случае есть силы притяжения; если же токи  $I_1$  и  $I_2$  имеют противоположные направления, силы взаимодействия станут отталкивающими. В этом смысле выражение (8.20) подобно закону Кулона, выражающему взаимодействие между электрическими зарядами. Поэтому формула (8.20) принята как выражение фундаментального закона магнитных взаимодействий, из которой в системе СИ определяется единица силы тока 1А. Если между двумя параллельными проводниками длиной в 1м, находящимися на расстоянии  $a = 1\text{м}$  друг от друга, силы взаимодействия равны  $2 \cdot 10^{-7} \text{Н}$ , то по этим проводникам тогда текут одинаковые токи  $I_1 = I_2 = 1\text{А}$ .

Выясним, как ведёт себя контур с током в магнитном поле. Рассмотрим для простоты плоскую прямоугольную рамку со сторонами  $a$  и  $b$ , по которой течёт ток  $I$ . Рамка находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ . Её начальное положение таково, что плоскость рамки параллельна линиям индукции (рис. 8.8). Пунктиром обозначена закреплённая ось, вокруг которой рамка может поворачиваться. Определим силы Ампера, действующие на стороны этого контура. В соответствии с выражением (19) действующие на верхнюю и нижнюю стороны силы Ампера равны нулю, так как угол между направлением индукции  $\vec{B}$  и направлением тока в этих сторонах равен или  $0^\circ$  (для нижней стороны) или  $180^\circ$  (для верхней стороны). На боковые стороны рамки действуют силы Ампера в противоположных направлениях, равные согласно (8.19)

$$F_A = IbB.$$

Таким образом, создаётся пара сил с плечом, равным  $a$ , и соответствующий вращающий момент

$$M_{\text{max}} = IBab.$$

Но  $ab = S$  - площадь рамки, поэтому  $M_{\text{max}} = IB S$ .

Если рамка повернётся на угол  $90^\circ$ , то плечо пары сил исчезнет, все силы Ампера, действующие на стороны рамки, будут лежать в плоскости рамки, растягивая её. Для промежуточных положений плечо пары сил равно  $a \cdot \sin \alpha$ , где  $\alpha$  - угол между нормалью  $\vec{n}$ , направленной перпендикулярно плоскости  $S$  рамки по правилу правого винта по отношению

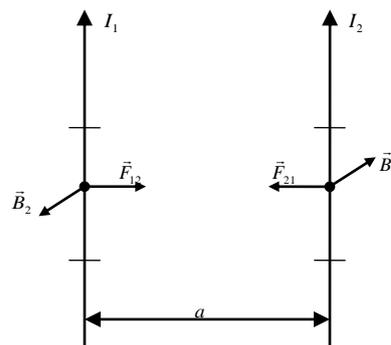


Рис. 8.7

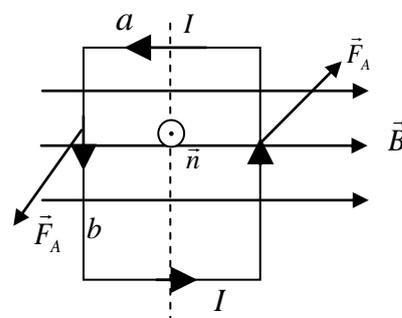


Рис. 8.8

к направлению тока  $I$  в рамке (на рисунке обозначено  $\odot$ ), и вектором  $\vec{B}$ . Поэтому вращающий момент для произвольного положения рамки можно записать в виде

$$M = ISB \cdot \sin \alpha. \quad (8.20a)$$

Учитывая, что  $IS = p_m$  - есть магнитный момент контура с током, которому согласно (13) соответствует вектор магнитного момента  $\vec{p}_m$ , выражение (8.20a) можно записать в векторной форме

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}]. \quad (8.20б)$$

Если рамка свободна, то при её повороте на угол  $d\alpha$  пара сил Ампера совершит элементарную работу  $dA = Md\alpha = ISB \sin \alpha d\alpha$ . Полная работа при повороте рамки равна

$$A = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} Md\alpha = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} ISB \sin \alpha d\alpha = -ISB(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

Каждому из слагаемых в этом выражении соответствует потенциальная энергия

$$W_n = -ISB \cos \alpha,$$

или в векторном виде

$$W_n = -\vec{p}_m \vec{B}. \quad (8.20 в)$$

Она имеет максимальное значение для  $\alpha = 180^\circ$ , равное  $\alpha = 0^\circ$ ,

и минимальное значение при  $\alpha = 0^\circ$ , равное

$$W_{n\min} = -ISB.$$

В обоих положениях вращающий момент  $M = 0$ , следовательно эти положения являются состояниями равновесия. Но только положение рамки для  $\alpha = 0^\circ$  является устойчивым. Другое положение будет неустойчивым, поскольку в этом положении потенциальная энергия рамки с током максимальна и достаточно малейшего отклонения от положения равновесия  $\alpha = 180^\circ$ , чтобы возник вращающий момент, удаляющий её от этого положения. Таким образом, рамка с током, помещённая в магнитном поле на неподвижной оси вращения, ведёт себя точно так же, как и стрелка компаса. Наглядная аналогия становится очевидной, если определять ориентацию рамки по отношению к линиям индукции направлением вектора  $\vec{n}$  (или  $\vec{p}_m$ ).

#### 8.1.4 Магнитный поток. Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции. Поле соленоида и тороида

В каждой точке пространства магнитное поле характеризуется вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Выделим в окрестности некоторой точки элементарную площадку  $dS$  (рис. 8.9). Поставим ей в соответствие вектор  $d\vec{S} = \vec{n}dS$ , где  $\vec{n}$  - единичный вектор, восстановленный к элементу поверхности  $dS$  перпендикулярно к ней. Такой вектор называется единичной нормалью к поверхности  $S$  в данной точке. Тогда по определению элементарный поток магнитного поля через элемент площади  $dS$  есть скалярное произведение

$$d\Phi_m = \vec{B}d\vec{S}, \quad (8.21)$$

или же в форме

$$d\Phi_m = B_n dS,$$

где  $B_n = B \cos \alpha$  - проекция вектора  $\vec{B}$  на нормаль  $\vec{n}$ .

Полный магнитный поток через конечную поверхность  $S$  выражается как интегральная сумма потоков  $d\Phi_m$  по всей этой поверхности

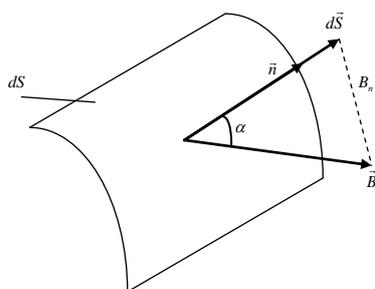


Рис. 8.9

$$\Phi_m = \int_S \vec{B} d\vec{S} = \int_S B_n dS. \quad (8.22)$$

Для однородного поля и плоской поверхности  $S$  магнитный поток

$$\Phi_m = BS \cos \alpha, \quad (8.22 a)$$

где  $\alpha$  - угол между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{n}$ .

Единицей измерения магнитного потока является вебер  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$ .

Если поверхность замкнута, то магнитный поток, пронизывающий такую поверхность равен нулю. Математически это выражается в виде интеграла по замкнутой поверхности, что обозначается кружком на символе интеграла

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS = 0. \quad (8.23)$$

Равенство нулю магнитного потока через замкнутую поверхность обусловлено свойством непрерывности линий магнитной индукции. Вследствие этого число линий магнитной индукции, выходящих и входящих в замкнутую поверхность всегда одинаково. По отношению к внешним нормальям  $\vec{n}$  к поверхности входящий поток имеет отрицательное значение, а выходящий положительное. В результате полный магнитный поток становится равным нулю.

Физически это свойство магнитного поля означает, что не существует неких «магнитных зарядов», подобных электрическим, на которых бы линии индукции начинались или заканчивались. Поэтому соотношение (8.23) выражает в математическом и физическом смыслах **теорему Гаусса для магнитного поля**. Линии магнитной индукции, не имея истоков и стоков, могут быть только замкнутыми непересекающимися кривыми. Это свойство нами уже рассматривалось для магнитного поля проводников с током и магнитного диполя (рис. 8.1, 8.6).

Рассмотрим другое важное свойство магнитного поля.

Для этого возьмем произвольный замкнутый контур  $L$ , охватывающий проводник с током  $I$  (рис. 8.10). В произвольной точке этого контура выразим скалярное произведение  $\vec{B} d\vec{l}$ , где  $d\vec{l}$  - элемент длины контура  $L$ . Направление вектора  $d\vec{l}$  совпадает с направлением обхода контура  $L$ , которое по отношению к направлению тока  $I$  в проводнике удовлетворяет правилу правого винта. Если теперь при полном обходе контура  $L$  просуммировать все значения  $\vec{B} d\vec{l}$  то мы получим интегральную сумму, названную **циркуляцией** вектора  $\vec{B}$  по замкнутой кривой  $L$ . Можно доказать, учитывая соотношение (8.6), что для контура  $L$  на рис. 8.10, охватывающего ток  $I$  циркуляция

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I, \quad (8.24)$$

а для контура  $L'$  на том же рисунке, который не охватывает ток  $I$ , по создающий в месте расположения этого контура магнитное поле с индукцией  $\vec{B}'$ , циркуляция вектора  $\vec{B}'$

$$\oint_{L'} \vec{B}' d\vec{l} = 0. \quad (8.25)$$

Записанные соотношения (8.24) или (8.25) выражают так называемую **теорему о циркуляции** вектора магнитной индукции. В общем случае, если контур обхода  $L$  охватывает несколько проводников с током, то в силу принципа суперпозиции

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{k=1}^N I_k. \quad (8.26)$$

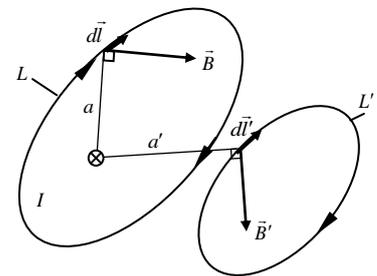


Рис. 8.10

Здесь суммирование токов осуществляется алгебраически – токи имеющие направление, согласованное с направлением обхода контура по правилу правого винта, записываются в общей сумме со знаком «плюс», в противном случае – со знаком «минус».

Таким образом, принципиальное отличие магнитного поля от электростатического состоит в том, что циркуляция вектора  $\vec{B}$  отлична от нуля. Такого рода поля получили название **вихревых** или **соленоидальных**. Поэтому магнитное поле нельзя определять скалярным потенциалом, как для электростатического поля, для которого циркуляция вектора напряжённости всегда равна нулю.

Теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  можно применять к расчету индукции поля от достаточно сложной конфигурации проводников с током. Типичным примером в этом отношении может служить расчет индукции поля в соленоиде и тороиде.

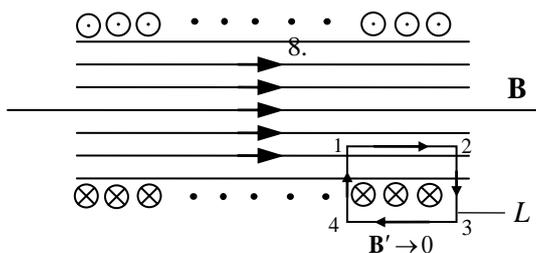


Рис. 8.11

**Соленоид** – это многовитковая однослойная проволочная катушка, как правило, круглого сечения.

**Тороид** – это соленоид, свернутый в кольцо.

Рассмотрим бесконечно длинный соленоид (рис. 8.11), по виткам которого протекает ток  $I$ .

В силу непрерывности линий индукции магнитного поля и магнитного потока внутри соленоида эти линии пронизывают конечную площадь поперечного сечения соленоида, а вне его – бесконечно большую

поверхность, перпендикулярную к соленоиду. Поэтому равенство и непрерывность магнитных потоков внутри и за пределами соленоида требуют, чтобы поле  $B'$  вне соленоида было пренебрежимо малым. Следовательно, из прямоугольного контура интегрирования  $L$ , по которому берется циркуляция, надо оставить только ту часть 1-2, которая проходит внутри соленоида.

Поэтому

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B l_{12}$$

По теореме о циркуляции

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 n l_{12} I$$

где  $n = N/l_{12}$  - число витков, приходящихся на единицу длины соленоида. Приравнявая правые части этих выражений, находим

$$B = \mu_0 n I . \quad (8.27)$$

Полученный результат не зависит от того, на каком расстоянии от оси внутри соленоида располагается отрезок контура 1-2. Это означает что магнитное поле внутри соленоида однородно, т. е.

$$B = const.$$

Для тороида, то есть соленоида, свернутого в кольцо, магнитное поле также заключено внутри тороида. Если поперечный размер тороида существенно превосходит радиус витка, то индукция магнитного поля внутри тороида рассчитывается по той же формуле (8.27).

Из рассмотрения формулы (8.27) следует, что некоторое значение индукции  $B$  можно достигнуть двумя способами – или увеличивая силу тока в соленоиде, или, сохраняя неизменной силу тока, увеличивать число витков соленоида, например, выбрав провод с меньшим диаметром. Таким образом, величина индукции в соленоиде (тороиде) однозначно определяется произведением силы тока на число витков, и это значение часто определяют названием «ампер-витки».

## § 8.2 Магнитное поле в веществе

Все вещества, помещенные в магнитное поле, приобретают магнитные свойства, т.е. намагничиваются. Намагниченное вещество создает в пределах своего объема магнитное поле  $\vec{B}'$ , которое накладывается на внешнее намагничивающее поле  $\vec{B}_0$ .

Результирующее поле равно

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' ,$$

где  $\vec{B}'$  определяется только магнитными свойствами вещества.

Намагничивание тел Ампер объяснил наличием в любом веществе циркулирующих круговых *микротоков* в атомах вещества, каждый из которых обладает магнитным моментом  $\vec{p}_m$ . Под действием внешнего магнитного поля  $\vec{B}_0$  магнитные моменты атомов (молекул) ориентируются вдоль этого поля и вещество намагничивается.

Запишем циркуляцию вектора  $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$  как сумму циркуляций внешнего поля  $\vec{B}_0$  и внутреннего -  $\vec{B}'$

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L \vec{B}_0 d\vec{l} + \oint_L \vec{B}' d\vec{l} , \quad (8.28)$$

тогда, учитывая (8.26), получим

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \sum I_{\text{мик}} , \quad (8.29)$$

где  $\sum I$  есть суммарный ток, протекающий по проводникам, например, по виткам соленоида, охватываемым контуром  $L$  (как на рис. 8.11), а  $\sum I_{\text{мик}}$  – суммарный молекулярный микроток по поверхности образца, находящегося внутри того же соленоида. Именно этот микроток и определяет свойства намагничивания вещества.

Эти свойства количественно характеризуют *вектором намагниченности*, равным суммарному магнитному моменту атомов вещества в единице объема

$$\vec{J} = \frac{\sum \vec{p}_{mi}}{\Delta V} .$$

Оказывается, что индукция  $\vec{B}'$ , создаваемая магнитными моментами атомов вещества, пропорциональна намагниченности  $\vec{J}$

$$\vec{B}' = \mu_0 \vec{J} . \quad (8.31)$$

В результате, с учетом теоремы о циркуляции (8.29), запишем

$$\oint_L \vec{B}' d\vec{l} = \mu_0 \oint_L \vec{J} d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{\text{мик}} . \quad (8.32)$$

Тогда выражение (8.29) можно переписать в виде

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum I + \mu_0 \oint_L \vec{J} d\vec{l}$$

Разделив правую и левую части этого равенства на  $\mu_0$  и объединив циркуляции от  $\vec{B}$  и  $\vec{J}$ , окончательно получим

$$\oint_L \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum I . \quad (8.33)$$

Выражение в скобках под знаком интеграла называется *напряжённостью магнитного поля* и обозначается  $\vec{H}$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} . \quad (8.34)$$

В результате формула (8.33) приобретает вид *теоремы о циркуляции вектора напряженности магнитного поля*:

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \sum I. \quad (8.35)$$

Из нее следует, что напряженность  $\vec{H}$  от свойств вещества уже не зависит, поскольку её циркуляция определяется только величиной суммарного тока проводников, охватываемых контуром обхода  $L$ . Поэтому, сопоставляя выражения (8.28) и (8.35), заключаем, что

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}. \quad (8.36)$$

Таким образом, вектор напряженности  $\vec{H}$  однозначно определяет значение индукции поля  $\vec{B}_0$  создаваемого в вакууме только токами проводимости. Но от этого поля пропорционально зависит намагниченность вещества.

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (8.37)$$

где  $\chi$  - так называемая **магнитная восприимчивость**, зависящая от магнитных свойств среды.

Подставляя (8.37) в формулу (8.34), получим

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1 + \chi)},$$

или, введя безразмерную величину  $\mu = 1 + \chi$  - **магнитную проницаемость** - окончательно запишем

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}. \quad (8.38)$$

В зависимости от знака и величины магнитной восприимчивости  $\chi$  все магнетики подразделяются на три вида – диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

**Диамагнетизм** – явление возникновения в веществе, помещённом во внешнее магнитное поле, намагниченности, ориентированной навстречу этому полю.

У диамагнитного вещества суммарный магнитный момент атома (молекулы) равен нулю. При внесении таких веществ (например, серебро, золото, медь) в магнитное поле возникает так называемая прецессия электронных орбит атома, подобную той, которую совершает диск волчка вокруг вертикали. Обусловленное прецессией дополнительное вращательное движение электронной орбиты приводит к возникновению индуцированного магнитного момента атома, направленного против поля. Это явление возникает у всех без исключения веществ.

Другой механизм намагничивания является ориентационным и проявляется в форме парамагнетизма.

**Парамагнетизм** – явление возникновения в веществе, помещённом во внешнее магнитное поле, намагниченности, ориентированной вдоль этого поля.

Парамагнитными свойствами обладает вещества, у которых атомы или молекулы в отсутствие внешнего поля имеет некоторый магнитный момент (кислород, алюминий, платина, щелочные и щелочно - земельные металлы). В отсутствие поля эти магнитные моменты ориентированы хаотично и парамагнитное вещество не проявляет каких - либо магнитных свойств. Внешнее поле ориентирует магнитные моменты преимущественно в направлении поля. В результате парамагнетик намагничивается и создает собственное магнитное поле, усиливающее основное. Полной ориентации противодействует тепловое движение атомов. При исчезновении внешнего поля тепловое движение сразу же разрушает упорядоченную ориентацию магнитных моментов и парамагнетик размагничивается.

**Ферромагнетиками** являются кристаллические вещества, обладающие намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля.

К ним относятся железо, никель, кобальт и их сплавы и соединения. Эти материалы намагничиваются очень сильно, на много порядков сильнее, чем диа - и парамагнитные вещества.

Ферромагнетики обладают следующими важными особенностями:

1. ферромагнетики намагничиваются уже в слабых полях,
2. их магнитная восприимчивость и проницаемость сложным образом зависят от намагничивающего внешнего поля. Главной особенностью такой зависимости является то, что при некотором предельном значении напряженности намагничивающегося поля  $H$  магнитная восприимчивость  $\chi$  и намагниченность  $J$  ферромагнетика достигают насыщения и не растут при дальнейшем увеличении намагничивающего поля.
3. ферромагнетики обладают свойствами остаточной намагниченности, выражающейся в том, что при исчезновении намагничивающегося поля ферромагнетик не размагничивается полностью. В нем остается остаточная намагниченность, которая сохраняется. Таким образом, получают постоянные магниты, способные притягивать к себе и намагничивать железосодержащие предметы (гвозди, шурупы, болты, гайки, отвертки и т.д.)
4. при намагничивании и размагничивании ферромагнитные тела изменяют свои размеры. Это явление называется *магнитострикцией*.
5. при определенной температуре называемой *точкой Кюри*, ферромагнетики теряют магнитные свойства. При температуре, превышающей точку Кюри, ферромагнетик становится парамагнетиком.
6. при осуществлении цикла намагничивание - размагничивание проявляется так называемый *гистерезис* (рис. 8.12). Кривые 0-1 или 0-2 соответствуют основной кривой намагничивания из не намагниченого состояния 0 в состояние насыщения 1 или 2. Размагничивание из состояния 1 требует включения размагничивающего поля  $-H_k$ , а из состояния 2 – поля с противоположным направлением  $+H_k$ . Эти напряженности поля называются *коэрцитивной* (запаздывающей) *силой* и характеризуют магнитные свойства вещества.

Таким образом, цикл намагничивания, размагничивания и перемагничивания происходит по замкнутой кривой, которая называется петлей гистерезиса.

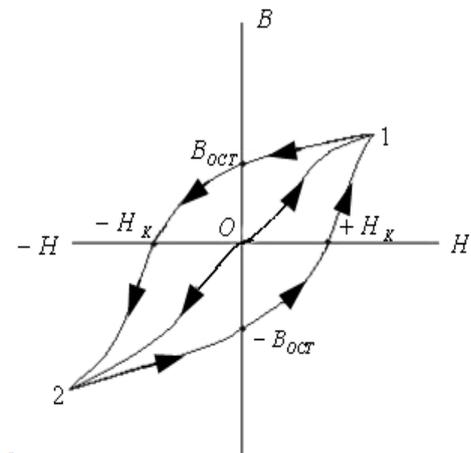


Рис. 8.12

Основы теории ферромагнетизма были созданы Я. И. Френкелем и В. Гейзенбергом в 1928г. Механизм ферромагнетизма и его особенности согласно этой теории объясняются следующим образом. В ферромагнетиках существует множество макроскопических областей спонтанной (самопроизвольной) намагниченности в состоянии насыщения. Эти области называются *доменами*. В пределах одного домена магнитные моменты электронов всех атомов ориентированы одинаково. Но ориентация самих доменов разнообразна. Поэтому в отсутствие внешнего поля суммарный магнитный момент всего тела равен нулю. Но при включении внешнего намагничивающего поля ферромагнетик сильно намагничивается за счет того, что домены, ориентированные изначально вдоль поля, быстро увеличивают свой объем, поглощая соседние домены иной ориентации, а также за счет поворота магнитных моментов других доменов в направлении внешнего поля. Первый из этих механизмов преобладает в слабых, а второй – в сильных полях.

Ферромагнитные материалы находят весьма широкое промышленное применение в самых разнообразных областях техники – в электротехнике (сердечники трансформаторов переменного тока, элементы конструкций электродвигателей и электрогенераторов) в электро- и радиоизмерительной аппаратуре, электросвязи, самой разнообразной бытовой техники, автоматике и др.

## § 8.3 Электромагнитная индукция

### 8.3.1 Явление электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции открыто Майклом Фарадеем в 1831г. Оно состоит в том, что при всяком изменении магнитного потока, пронизывающего проводящий контур, в нем возникает электродвижущая сила  $\mathcal{E}_i$ , называемая ЭДС индукции. Если контур замкнут, то ЭДС индукции вызывает в нём индукционный ток. Таким образом, был открыт неизвестный до Фарадея способ получения электрического тока с помощью магнитного поля. Фарадей установил, проведя серию экспериментов, что величина  $\mathcal{E}_i$  не зависит от способа, которым осуществляется изменение магнитного потока  $\Phi_m$ , а определяется лишь скоростью изменения его со временем, т.е.  $\mathcal{E}_i \sim d\Phi_m / dt$ . В итоге был сформулирован **закон электромагнитной индукции** Фарадея, в математическом выражении имеющий простую формулу:

$$\mathcal{E}_i = - \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (8.39)$$

Знак минус перед производной от  $\Phi_m$  отражает так называемое **правило Ленца**, позволяющее установить направление индукционного тока, возбуждаемого в проводящем контуре: *индукционный ток всегда имеет такое направление, что его собственное магнитное поле противодействует изменению потока магнитной индукции, вызвавшего этот ток.*

Возникает вопрос, а если некий замкнутый контур не содержит свободных носителей электрического заряда, пусть даже такой контур есть замкнутая линия, мысленно выделенная в вакуумном пространстве, возникает ли в нем ЭДС индукции? Ответ таков – да, возникает и уравнение (8.39) ни в чем не меняется. Тогда напрашивается другой вопрос, что же означает физически ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$  в таком случае? Для этого напомним, что понятие ЭДС выражает работу сторонних сил над единичным положительным зарядом по его перемещению в поле сторонних сил с напряженностью  $\vec{E}$ .

Для замкнутого контура  $L$  эта работа равна циркуляции вектора напряженности электрического поля сторонних сил, т.е. ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} d\vec{l}. \quad (8.39 \text{ а})$$

Следовательно, меняющийся магнитный поток создает вокруг линий магнитной индукции электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , силовые линии которого не связаны с какими либо зарядами. Оно существует в любой точке замкнутого контура  $L$ , не начинаясь и не заканчиваясь на зарядах, а, следовательно, так же, как и магнитное поле, носит вихревой характер. Таким образом, из закона электромагнитной индукции следует, что меняющееся вихревое магнитное поле порождает связанное с ним вихревое электрическое поле. В проводящем контуре это поле создает индукционный ток.

### 8.3.2 Механизмы возникновения ЭДС индукции

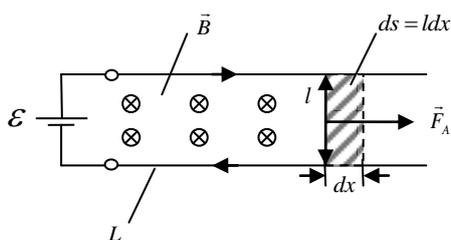


Рис. 8.13

Закон электромагнитной индукции Фарадея является проявлением закона сохранения и превращения энергии. Рассмотрим электрическую цепь с источником тока  $\mathcal{E}$  и подключенными к его зажимам параллельными проводами, по которым без трения может свободно скользить перемычка длиной  $l$  (рис. 8.13). Пусть перпендикулярно плоскости образованного проводящего контура возбуждено однородное поле с индукцией  $\vec{B}$ .

В контуре течет некоторый ток  $I$ , вследствие чего на перемычку длиной  $l$  действует сила Ампера  $F_A = IBl$ . За промежуток времени  $dt$  под её действием совершается работа

$dA = Fdx = IBldx = IBdS$ . Но произведение  $BdS$  выражает приращение магнитного потока  $d\Phi_m$ , пронизывающего замкнутый контур  $L$ , т.е.

$$dA = I d\Phi_m \quad (8.40)$$

Эта работа совершается за счет работы источника тока  $\mathcal{E}$ , включенного в рассматриваемой цепи. Полная работа источника дополнительно включает в себя ту энергию, которая выделяется в соответствии с законом Джоуля – Ленца в виде тепла в сопротивлении  $R$  проводников контура  $L$ . Следовательно, за промежуток времени  $dt$ , совершенная источником тока работа равна

$$\mathcal{E}Idt = I^2 Rdt + Id\Phi_m \quad (8.41)$$

Решая это уравнение относительно силы тока  $I$  в контуре, найдем

$$I = \frac{\mathcal{E} - d\Phi_m / dt}{R} \quad (8.42)$$

Отсюда видно, что в контуре, содержащем источник тока с ЭДС  $\mathcal{E}$ , при изменении магнитного потока через контур в нем возникает дополнительная ЭДС, равная  $d\Phi_m / dt$ . Это и есть ЭДС индукции, наведенная в подвижной перемычке длиной  $l$ . Вызванный индукционный ток уменьшает силу тока источника  $\mathcal{E}$ , как бы препятствуя приращению магнитного потока за счет увеличения площади контура на величину  $dS$ . Поэтому ЭДС  $\mathcal{E}_i$  в рассматриваемом контуре имеет направление, противоположное направлению ЭДС источника  $\mathcal{E}$ . Возникновение в контуре ЭДС  $\mathcal{E}_i$  означает, что на носители заряда действуют сторонние силы. Анализ свидетельствует, что роль сторонних сил, создающих индукционный ток, играют магнитные силы, т.е. сила Лоренца.

### 8.3.3 Явление самоиндукции

Если по проводнику течет меняющийся со временем ток, т.е. переменный ток, то он создает в окружающем пространстве переменное магнитное поле. Тогда окажется, что этот проводник находится в собственном переменном магнитном поле и в нем же возникает ЭДС индукции. Это явление называется *самоиндукцией*.

Если взять контур с током, то по закону Био - Савара – Лапласа магнитная индукция поля и магнитный поток, связанный с этим контуром, пропорциональны току. Поэтому можно записать, что  $\Phi_m \approx I$ . Если ввести коэффициент пропорциональности, то запишем

$$\Phi_m = LI, \quad (8.43)$$

где  $L$  – так называемая *индуктивность контура*. Это скалярная физическая величина. Индуктивность зависит от формы и размеров проводника (контура), магнитных свойств окружающей его среды. В системе СИ индуктивность измеряется в генри (Гн).

Пусть за время  $dt$  ток в контуре изменится на величину  $dI$ . Тогда согласно (8.43) магнитный поток, связанный с контуром, изменится на величину

$$d\Phi_m = LdI,$$

в результате чего в этом контуре появится ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (8.44)$$

Она пропорциональна скорости изменения тока и зависит от индуктивности контура. Знак минус показывает, что ЭДС самоиндукции, а, следовательно, и ток самоиндукции всегда препятствуют изменению тока, заданному внешним источником. Примером явления самоиндукции служат так называемые *экстратоки* замыкания и размыкания, возникающие при включении и выключении тока в контуре, обладающем большой индуктивностью. За счет самоиндукции ток в контуре, имеющем значительную индуктивность и некоторое сопротивление проводников контура, нарастает или убывает плавно. При очень быстром изменении тока ЭДС самоиндукции может достигать больших значений, вызывающих в месте замыкания или размыкания цепи дуговой разряд через воздушный промежуток вблизи контактов выключателя.

### 8.3.4 Явление взаимной индукции

**Взаимной индукцией двух контуров** называется явление возникновения ЭДС индукции в одном из них при изменении силы тока в другом, расположенном по соседству.

Если в первом контуре течет переменный ток, то он создает переменный магнитный поток, который пронизывает второй контур

$$d\Phi_{m2} = L_{21}dI_1, \quad (8.45)$$

и во втором контуре индуцируется ЭДС

$$\varepsilon_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (8.46)$$

Аналогично, если во втором контуре течет переменный ток  $I_2$ , то

$$d\Phi_{m1} = L_{12}dI_2, \quad (8.45 \text{ а})$$

и

$$\varepsilon_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (8.45 \text{ б})$$

Такие контуры называются индуктивно связанными, коэффициенты пропорциональности  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются **взаимной индуктивностью контуров** и зависят от формы и их взаимного положения. Доказано, что  $L_{12} = L_{21}$ . Заметим, что физический смысл коэффициента взаимной индукции и коэффициента самоиндукции (индуктивности) характеризует свойство одного контура, а коэффициент взаимной индукции зависит от формы, размеров, взаимного расположения обеих контуров, а также от магнитных свойств среды. На явлении взаимной индукции основано действие трансформаторов переменного тока, индукционных катушек и других приборов.

## § 8.4 Энергия магнитного поля

Так как магнитное поле неразрывно связано с током, то, очевидно, что часть энергии электрического тока идет на создание магнитного поля. Поэтому магнитное поле должно обладать энергией, равной работе, затраченной током на создание потока магнитной индукции, порождаемого этим током. Физическая сущность явления электромагнитной индукции как раз и объясняется наличием энергии у магнитного поля. Оно основано на взаимных превращениях энергии электрического тока и магнитного поля.

Рассмотрим электрический контур, имеющий индуктивность  $L$ . Если в такой цепи течёт ток  $I$ , то он создаёт в окружающем пространстве магнитное поле, характеризующееся потоком магнитной индукции, пронизывающим этот контур. Если такой контур разомкнуть, то ток начнет непрерывно убывать за счет возникновения ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$ , препятствующей мгновенному исчезновению тока и связанного с ним магнитного потока. Найдем работу ЭДС самоиндукции за всё время исчезновения тока. Элементарная работа за время  $dt$  равна

$$dA = \varepsilon_s Idt, \quad (8.47)$$

где  $\varepsilon_s$  и  $I$  – величина ЭДС самоиндукции и тока в начальный момент времени. Поскольку

$$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}, \text{ то } dA = -LI dI.$$

Взяв интеграл от правой и левой частей этого уравнения с учетом того, что ток  $I$  после размыкания контура стремится к нулю, найдем полную работу, совершенную ЭДС самоиндукции за время исчезновения магнитного поля

$$A = \int_I^0 dA = \frac{LI^2}{2}. \quad (8.48)$$

Но ЭДС самоиндукции существует до тех пор, пока существует меняющийся во времени магнитный поток, т.е. магнитное поле. Поэтому исходным носителем энергии в этом процессе, за счет которого была совершена работа (8.48), следует считать магнитное поле.

Таким образом, энергия магнитного поля, созданного током  $I$ , текущим в цепи с индуктивностью  $L$ , равна

$$W_m = \frac{LI^2}{2}. \quad (8.49)$$

Рассмотрим достаточно длинный соленоид, внутренний объём которого заполнен веществом с магнитной проницаемостью  $\mu$ , это может быть железный сердечник. Тогда магнитное поле, созданное током  $I$ , протекающим по виткам соленоида, можно считать однородным, и согласно теореме о циркуляции напряженности магнитного поля.

$$Hl = NI,$$

откуда

$$H = \frac{N}{l} I = nI,$$

а индукция магнитного поля соленоида из (38)

$$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 nI, \quad (8.50)$$

где  $n$  – число витков соленоида на единицу длины.

Магнитный поток, пронизывающий один виток соленоида

$$\Phi_m = BS = \mu\mu_0 nIS.$$

Полный магнитный поток, сцепленный со всеми  $N$  витками называется **магнитным потокосцеплением**:

$$\Psi_m = N\Phi_m = \mu\mu_0 nNSI. \quad (8.51)$$

Отношение потокосцепления к силе тока согласно выражению (8.43) есть индуктивность соленоида

$$L = \frac{\Psi_m}{I} = \mu\mu_0 n^2 NS = \mu\mu_0 n^2 Sl.$$

Учитывая, что  $Sl = V$  – объём соленоида длиной  $l$ , получим

$$L = \mu\mu_0 n^2 V. \quad (8.52)$$

Подставив это значение в формулу (8.49) с учетом (8.50) окончательно найдем

$$W_m = \frac{\mu_0 \mu n^2 B^2 V}{2(\mu_0 \mu n)^2} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V. \quad (8.53)$$

Так как в соленоиде магнитное поле однородно, то его можно характеризовать объёмной плотностью энергии (энергией единицы объёма)

$$w_m = \frac{W_m}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (8.54)$$

Величина  $w_m$  может быть также характеристикой и неоднородного поля, если объём  $V$  стягивается в точку, т.е.

$$w_m = \frac{dW_m}{dV} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}. \quad (8.54 \text{ а})$$

Итак, подобно тому, как электрическая энергия системы зарядов сосредотачивается в электрическом поле, так и энергия магнитного поля токов сосредоточена в магнитном поле, характеризуемом в каждой точке пространства не только значением индукции  $B$ , но и некоторой объёмной плотностью  $w_m$ . Магнитное поле, неразрывно связанное с энергией, свидетельствует о его материальности и потому является реальным физическим объектом, достойным изучения и познания его свойств.

## § 8.5 Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

В 60-х годах 19 века Джеймс Клерк Максвелл, основываясь на идеях Фарадея об электрическом и магнитном полях, обобщил законы, установленные экспериментальным путем, и разработал теорию единого электромагнитного поля, создаваемого произвольной системой зарядов и токов. Важнейшими достижениями теории Максвелла явилось:

- 1) открытие нового вида материи – электромагнитного поля, которое столь же материально, как частицы вещества.
- 2) предсказание электромагнитных волн, которые могут распространяться даже в вакууме.

Уравнения, предложенные Максвеллом, составляют основу как электротехники и радиотехники, так и теории любых электромагнитных явлений в любых средах. Теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привело Максвелла к созданию электромагнитной теории света.

Уравнения Максвелла позволяют решить *основную задачу электродинамики*: зная распределение токов и электрических зарядов в пространстве, можно найти характеристики создаваемого ими электромагнитного поля.

Уравнения Максвелла могут быть представлены в двух формах - дифференциальной и интегральной. Рассмотрим сначала дифференциальную форму этих уравнений, справедливых для макроскопических процессов, в которых находит своё выражение усреднённое действие огромного числа элементарных частиц. Они записываются для точки пространства, поэтому выражаются через дифференциальные операторы от векторных величин по пространственным координатам.

Выясним сначала смысл операторов, используемых в уравнениях Максвелла. Первым таким оператором является оператор *дивергенции (расходимости)*, обозначаемый символом *div*. По определению операция *div* есть предел, к которому стремится отношение потока некоторого вектора  $\vec{A}$  через замкнутую поверхность к объёму, охваченному поверхностью, при условии стягивания ее в точку, т.е.

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oiint \vec{A} d\vec{S}}{V}. \quad (8.55)$$

В прямоугольной системе координат операция *div* над вектором  $\vec{A}$  записывается в виде

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (8.55 \text{ a})$$

Её значение может быть положительной или отрицательной величиной в зависимости от того, является ли данная точка пространства источником или стоком силовых линий векторного поля  $\vec{A}$ . Если же  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ , то это значит, что силовая линия, не начинаясь или не заканчиваясь в данной точке, лишь проходит через неё.

Второй оператор, используемый в уравнениях Максвелла, называется *ротором (вихрем)* и обозначается *rot*. Он характеризует *вращательное (вихревое)* свойство векторного поля. Например, доказывается, что для вращательного движения твердого тела ротор вектора линейной скорости  $\vec{V}$  некоторой точки тела равен удвоенному значению вектора угловой скорости  $\vec{\omega}$ , т.е.  $\operatorname{rot} \vec{V} = 2\vec{\omega}$ . В прямоугольной системе координат операция  $\operatorname{rot} \vec{A}$  имеет вид

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}. \quad (8.56)$$

Выпишем теперь основные уравнения Максвелла в дифференциальной форме и определим их взаимосвязь с основополагающими законами электрических и магнитных явлений. Этих уравнений четыре:

$$\begin{aligned}
1. \quad & \operatorname{div} \vec{D} = \rho \\
2. \quad & \operatorname{div} \vec{B} = 0 \\
3. \quad & \operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j}_{np} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \\
4. \quad & \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}
\end{aligned}
\tag{8.57}$$

К этим уравнениям следует добавить ещё три, так называемых, *материальных уравнения*, устанавливающих связь между векторными величинами  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{B}$ , а так же между плотностью тока проводимости  $\vec{j}_{np}$  и напряженностью  $\vec{E}$  электрического поля:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j}_{np} = \sigma \vec{E}. \tag{8.57 а}$$

Здесь  $\vec{D}$  - электрическое смещение (индукция), Кл/м<sup>2</sup>;  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля, В/м;  $\vec{B}$  - магнитная индукция, Тл;  $\vec{H}$  - напряженность магнитного поля, А/м;  $\epsilon$  и  $\mu$  - диэлектрическая и магнитная проницаемости среды;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  - электрическая и магнитная постоянные;  $\sigma$  - удельная проводимость среды, 1/Ом·м. Таким образом, записанные соотношения устанавливают связь между всеми названными величинами через электрические и магнитные характеристики среды, в которой существует совокупность полей электрического (векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{D}$ ) и магнитного (векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$ ). Такого рода совокупность полей и получила название *электромагнитного поля*.

Первые два уравнения системы (8.57) характеризуют электромагнитное поле по наличию его источников. В первом уравнении  $\operatorname{div} \vec{D}$  равна объёмной плотности заряда  $\rho = dq / dV$ . Из определения (8.55) следует, что поток электрического смещения  $\oiint_S \vec{D} d\vec{S} \rightarrow dq$ , если поверхность  $S$  стягивается в точку. Для конечного объёма  $\Delta V$  записанный интеграл выражает *теорему Гаусса для вектора  $\vec{D}$* :

$$\Phi_D = \oiint_S \vec{D} d\vec{S} = q.$$

Если внутри замкнутой поверхности сосредоточен заряд положительного знака, то поток  $\Phi_D$  исходит из объёма  $\Delta V$ , если отрицательного - входит в него. Следовательно, силовые линии электрического поля начинаются на положительных зарядах (истоках поля) и заканчиваются на отрицательных (стоках этого поля).

В отличие от них линии магнитной индукции всегда непрерывны, не существует неких «магнитных зарядов», на которых бы они начинались или заканчивались. Поток вектора магнитной индукции  $\Phi_m = \oiint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$  всегда, независимо от формы поверхности, а это возможно только в том случае, когда линии магнитной индукции будут замкнутыми кривыми.

Приведенные выше соотношения для потоков электрического смещения  $\Phi_D$  и магнитной индукции  $\Phi_m$  представляют собой интегральную форму первых двух уравнений Максвелла, физическая сущность которых выражается теоремой Гаусса для соответствующих полей.

Для выяснения физического содержания третьего и четвертого уравнений Максвелла (8.57) воспользуемся теоремой Стокса. Согласно этой теореме поток ротора от некоторого вектора  $\vec{A}$  векторного поля через поверхность  $S$ , опирающуюся на замкнутый контур  $L$ , равен циркуляции вектора  $\vec{A}$  вдоль этого контура (рис. 8.14):

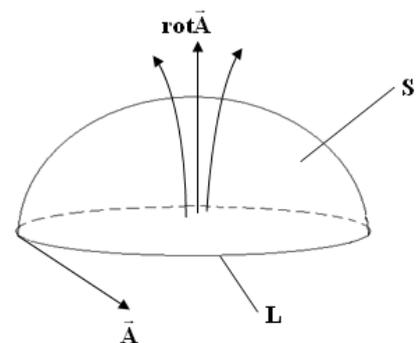


Рис. 8.14

$$\int_S \text{rot } \vec{A} d\vec{S} = \oint_L \vec{A} d\vec{l}. \quad (8.58)$$

Тогда, применяя эту теорему к уравнению 3 системы (8.57) можно записать

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \oint_L \vec{H} d\vec{l}, \quad (8.58 \text{ a})$$

$$\int_S \text{rot } \vec{H} d\vec{S} = \int_S \vec{j}_{np} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (8.59)$$

Приравняв правые части уравнений (8.58 a) и (8.59), получим

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \vec{j}_{np} d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (8.60)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (8.60) есть электрический ток проводимости  $I_{np}$ , охватываемый контуром  $L$ . Второй интеграл запишем, изменив в нем порядок интегрирования и дифференцирования:

$$\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S}. \quad (8.61)$$

Здесь  $\int_S \vec{D} d\vec{S} = \Phi_D$  есть поток вектора электрического смещения через поверхность  $S$ ,

который согласно теореме Гаусса имеет размерность электрического заряда  $q$ , и, следовательно, производная по времени от него формально есть так же ток. Но важно подчеркнуть, что этот ток никак не связан с переносом электрического заряда через поверхность  $S$ , он обусловлен только изменением во времени потока электрического смещения через эту поверхность. Этот ток был назван Максвеллом *током смещения*:

$$I_{cm} = \frac{\partial \Phi_D}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S} \quad (8.62)$$

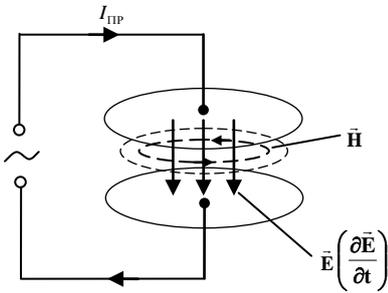


Рис. 8.15

В результате уравнение (8.60) выражает теорему о циркуляции напряжённости магнитного поля (8.35) с дополнением в неё кроме тока проводимости  $I_{np}$  ещё и тока смещения  $I_{cm}$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I_{np} + I_{cm}. \quad (8.63)$$

Записанное выражение получило название *закона полного тока*. Из него следуют важные выводы.

Прежде всего, магнитное поле в общем случае создаётся как токами проводимости, так и токами смещения. Более того, токов проводимости может и не быть, но если есть ток смещения, т.е. меняющееся во времени электрическое поле, то он создаёт связанное с ним вихревое магнитное поле. Но ток смещения существует в любой непроводящей среде (диэлектрике), а также в вакууме и обусловлен только меняющимся во времени электрическим полем.

Так, если к обкладкам конденсатора приложить переменное напряжение (рис. 8.15), то в пространстве между ними возникает переменное электрическое поле  $\partial \vec{E} / \partial t$ , которое сразу же вызовет связанное с ним магнитное поле  $\vec{H}$ , силовые линии которого будут обхватывать силовые линии электрического поля так, как если бы между обкладками конденсатора протекал вполне определённый ток проводимости. Его роль выполняет ток смещения (8.62), не связанный с переносом каких-либо носителей заряда. Если между обкладками конденсатора вакуум, то в этом пространстве возникает «чистый» ток смещения

$$I_{cm} = \varepsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S}. \quad (8.64)$$

Если же между обкладками конденсатора находится диэлектрик, то электрическое смещение  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ , где  $\vec{P}$  - вектор поляризованности диэлектрика. Тогда ток смещения

$$I_{CM} = \epsilon_0 \frac{\partial \Phi_E}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{E} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{P} d\vec{S}. \quad (8.64 \text{ a})$$

К чистому току смещения, возникающему в вакууме, добавляется, так называемый, ток поляризации  $\int_S \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} d\vec{S}$ , обусловленный колебательным движением связанных зарядов диэлектрика. Ток смещения в вакууме не сопровождается выделением тепла, но создаёт магнитное поле. В диэлектрике колебательное движение поляризационных зарядов за счёт взаимодействия между атомами и молекулами вещества может сопровождаться выделением теплоты.

Наконец, обратимся к четвёртому уравнению Максвелла системы (8.57). Применив к нему теорему Стокса (8.58) и произведя аналогичные выкладки, получим интегральную форму этого уравнения

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad (8.65)$$

Учитывая, что  $\int_S \vec{B} d\vec{S} = \Phi_m$  есть поток магнитной индукции, а  $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \mathcal{E}_i$  есть ЭДС индукции (8.39), заключаем, что уравнение (8.65) выражает закон электромагнитной индукции Фарадея. Из него следует, что меняющееся во времени магнитное поле создаёт связанное с ним вихревое электрическое поле. Их совокупность и есть электромагнитное поле, имеющее в каждой точке пространства две компоненты – напряжённость электрического поля  $\vec{E}$  и индукцию магнитного поля  $\vec{B}$ . При изменении во времени любого из них порождается обусловленное этим изменением другое, которое в свою очередь опять создаёт первое. Этот процесс непрерывен как во времени, так и в пространстве. С энергетической точки зрения происходит взаимное преобразование одного вида энергии – энергии электрического поля в другой вид – энергию магнитного поля. Следовательно, электромагнитное поле обладает энергией, которая может переноситься в пространстве с определённой скоростью. *Процесс распространения в пространстве переменного электромагнитного поля называется электромагнитной волной.*

Таким образом, подведём краткий анализ уравнений Максвелла.

### Первое уравнение Максвелла

(является выражением теоремы Гаусса для электростатического поля в диэлектрике)

*Поток вектора электрической индукции (электрического смещения)  $\vec{D}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность  $S$  равен свободному заряду, заключённому в объёме, ограниченном этой поверхностью.*

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV$$

**Физический смысл первого уравнения Максвелла:**

оно показывает, что источником электростатического поля являются свободные электрические заряды.

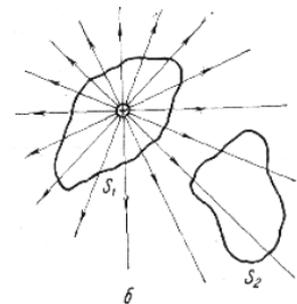


Рис. 8.16

### Второе уравнение Максвелла

(является выражением теоремы Гаусса для магнитного поля)

*Поток вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  сквозь произвольную замкнутую поверхность равен нулю.*

$$\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$$

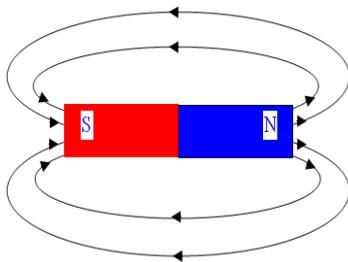


Рис. 8.17

**Физический смысл второго уравнения Максвелла:**

оно указывает на то, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Это говорит о том, что в природе не существует магнитных зарядов.

### Третье уравнение Максвелла

(является обобщением закона полного тока в веществе)

*Циркуляция вектора напряжённости магнитного поля  $\vec{H}$  вдоль произвольного замкнутого контура  $L$  равна потоку векторов плотности тока проводимости  $\vec{j}_{\text{пров}}$  и плотности тока*

*смещения  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  через поверхность, ограниченную этим контуром.*

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left( \vec{j}_{\text{пров}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

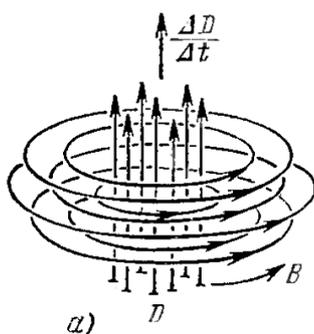


Рис. 8.18

**Физический смысл третьего уравнения Максвелла:**

магнитное поле порождается не только током проводимости, но и изменяющимся во времени электрическим полем.

### Четвёртое уравнение Максвелла

(является выражением закона Фарадея электромагнитной индукции)

*Циркуляция вектора напряжённости вихревого электрического поля  $\vec{E}_{\text{вихр}}$  вдоль произвольного замкнутого контура  $L$  равна потоку вектора  $\vec{B}$  через поверхность, ограниченную этим контуром, взятому с противоположным знаком.*

$$\oint_L \vec{E}_{\text{вихр}} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$$

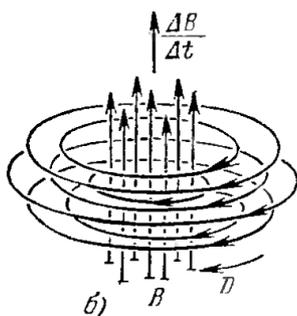


Рис. 8.19

**Физический смысл четвёртого уравнения Максвелла:**

переменное магнитное поле порождает вокруг себя вихревое электрическое поле.

### Вопросы для самопроверки

1. Магнитное поле, его основные свойства и характеристики.
2. Графическое изображение магнитного поля: силовые линии вектора магнитной индукции. Поток вектора магнитной индукции.
3. Закон Био-Савара-Лапласа. Принцип суперпозиции для магнитных полей.
4. Магнитное поле прямолинейного проводника с током конечной и бесконечной длины, бесконечно длинного соленоида и тороида с током, в центре кругового витка с током.
5. Силы Ампера и Лоренца.
6. Работа магнитного поля по перемещению проводника и контура с током.
7. Магнитный механический момент, действующий на контур с током в магнитном поле.
8. Диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики. Их особенности и основные характеристики. Закон полного тока для магнитного поля в вакууме и в веществе.
9. Явление электромагнитной индукции. Закон Фарадея для электромагнитной индукции. Правило Ленца.
10. Явление самоиндукции и взаимной индукции. Индуктивность контура и соленоида.
11. Энергия магнитного поля контура и соленоида с током.
12. Уравнения Максвелла и их физический смысл.

### § 8.6 Примеры решения задач

**Пример 8.1** Определить магнитную индукцию  $B$  в центре квадратной проволочной рамки со стороной  $b = 3 \text{ см}$ , по которой течёт ток  $I = 3 \text{ А}$ .

**Решение:**

Обратимся к рис. 1, иллюстрирующему условие задачи. От каждой из сторон квадрата в центре рамки индукции  $\vec{B}_1, \dots, \vec{B}_4$  направлены в одну сторону – перпендикулярно её плоскости, что обозначено на рисунке  $\otimes$ . Т.к. все стороны равны и точка  $O$  равноудалена от них, то результирующая индукция будет в 4 раза больше, чем от одной из сторон. Значение этой индукции рассчитаем по формуле (8.5). В ней

надо тогда считать  $a = \frac{b}{2}$ ,  $\alpha_1 = 45^\circ$ ,  $\alpha_2 = 135^\circ$ . В результате запишем

$$B = 4 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I}{b/2} (\cos 45^\circ - \cos 135^\circ) = \frac{2\mu_0 I}{\pi b} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi b}.$$

Подставив численные значения, получим

$$B = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 3}{\pi \cdot 3 \cdot 10^{-2}} = 11.3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$$

**Ответ:**  $B = 11.3 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$ .

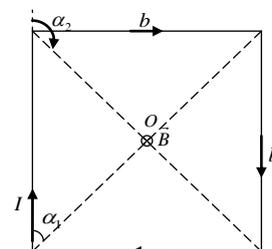


Рис. 1

**Пример 8.2** На проволочный виток радиусом  $R = 10 \text{ см}$ , помещенный между полюсами магнита, действует максимальный механический момент  $M_{\max} = 6.5 \text{ мкН} \cdot \text{м}$ . Сила тока в витке  $I = 2 \text{ А}$ . Определите магнитную индукцию  $B$  между полюсами магнита.

**Решение:**

Индукцию  $B$  магнитного поля можно определить из выражения для вращающегося механического элемента  $M = ISB \cdot \sin \alpha$ , который максимален, когда  $\alpha = 90^\circ$  ( $\sin 90^\circ = 1$ ), т.е.  $M_{\max} = ISB = p_m B$ . Отсюда, учитывая, что  $S = 2\pi r^2$ , находим

$$B = \frac{M_{\max}}{I\pi r^2}$$

Произведя вычисления, найдем  $B = 104 \text{ мкТл}$ .

**Ответ:**  $B = 104 \text{ мкТл}$ .

**Пример 8.3** Два параллельных бесконечных провода, по которым текут в одном направлении токи  $I = 60\text{А}$ , расположены на расстоянии  $d = 10\text{ см}$  друг от друга. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке, отстоящей от одного провода на расстоянии  $a_1 = 5\text{ см}$ , а от другого - на расстоянии  $a_2 = 12\text{ см}$ .

**Решение:**

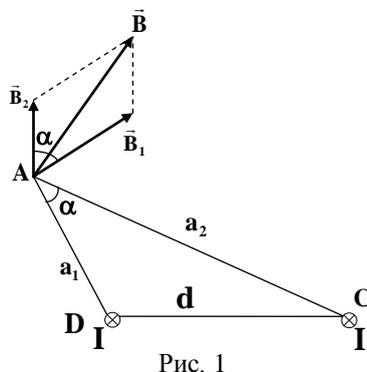


Рис. 1

Для нахождения индукции в указанной точке **A** (рис. 1) определим направление векторов индукции  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  полей, создаваемых каждым проводником в отдельности, и согласно принципу суперпозиции сложим их геометрически, т. е.  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$ . При построении параллелограмма векторов индукции следует учитывать, что вектор  $\vec{B}_1$  перпендикулярен  $a_1$ , вектор  $\vec{B}_2$  - соответственно  $a_2$ , и их направления удовлетворяют праввинтовой системе. Поэтому угол между  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  равен углу  $\alpha$  между сторонами  $a_1$  и  $a_2$  в  $\Delta ADC$ .

Модуль индукции  $B$  найдём по теореме косинусов

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2 \cos \alpha} \quad (1)$$

Применяя формулу (8.6), выразим  $B_1$  и  $B_2$  и подставим их значения в формулу (1), тогда получим

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{a_2^2} + \frac{2}{a_1 a_2} \cos \alpha}. \quad (2)$$

Значение  $\cos \alpha$  рассчитаем, применив теорему косинусов для  $\Delta ADC$ :

$$d^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2 \cos \alpha,$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{a_1^2 + a_2^2 - d^2}{2a_1 a_2}.$$

Подставив сюда данные, вычислим:  $\cos \alpha = 0,576$ . Окончательный расчёт по формуле (2) даёт

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 60}{2 \cdot \pi} \sqrt{\frac{1}{0,05^2} + \frac{1}{0,12^2} + \frac{2}{0,05 \cdot 0,12} \cdot 0,576} \text{ Тл} = 286 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} = 286 \text{ мкТл}$$

**Ответ:**  $B = 286 \text{ мкТл}$ .

**Пример 8.4** Найти магнитный поток  $\Phi$ , создаваемый соленоидом сечением  $S = 10\text{ см}^2$ , если он имеет  $n = 10$  витков на каждый сантиметр его длины при силе тока  $I = 20\text{А}$ .

**Решение:**

Непосредственное применение формул (8.22 а) и (8.27) дают следующее решение

$$\Phi_m = BS,$$

где  $B = \mu_0 n I$ , откуда

$$\Phi_m = \mu_0 n I S.$$

После подстановки данных найдем результат расчета

$$\Phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ Вб} = 25,2 \text{ мкВб}.$$

**Ответ:**  $\Phi = 25,2 \text{ мкВб}$ .

**Пример 8.5** Бесконечно длинный провод с током  $I = 50\text{А}$  имеет изгиб (плоскую петлю) радиусом  $R = 10\text{ см}$ . Определить магнитную индукцию в центре этой петли, для случаев а) и б) на рис. 1

**Решение:**

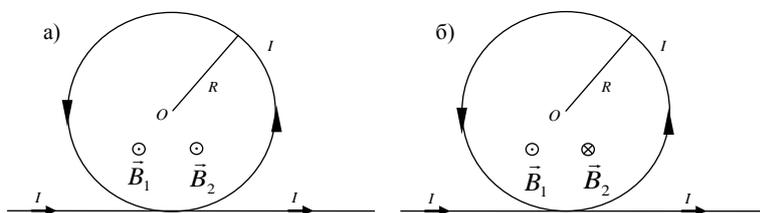


Рис. 1

Согласно принципу суперпозиции результирующая магнитная индукция  $\vec{B}$  в точке  $O$  есть векторная сумма индукций  $\vec{B}_1$  от бесконечной прямолинейной части проводника и  $\vec{B}_2$  от кольцевого тока  $I$  в центре витка радиусом  $R$

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2.$$

Для случая а) направления векторов  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  совпадают – оба вектора направлены **к нам** (обозначены  $\odot$ ), в случае б) эти векторы имеют противоположное направление – ток в петле изменил своё направление по сравнению со случаем а), поэтому вектор  $\vec{B}_2$  от этого тока станет направлен **от нас** (обозначено  $\otimes$ ). Тогда величина магнитной индукции для (рис. 1 а)  $B = B_1 + B_2$ , а для (рис. 1 б)  $B = B_1 - B_2$ . Значения  $B_1$  и  $B_2$  можно рассчитать по формуле (8.6) и (8.8) соответственно:

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{R}; \quad B_2 = \mu_0 \frac{I}{2R}.$$

Таким образом, запишем

$$\text{а) } B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I}{R} + \mu_0 \frac{I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (1 + \pi).$$

Подставив данные и значения  $\mu_0$  и  $\pi$ , получим

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi \cdot 0,1} (1 + 3,14) = 414 \text{ мкТл}.$$

$$\text{б) } B = B_1 - B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} - \frac{\mu_0 I}{2R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} (1 - \pi);$$

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 50}{2\pi \cdot 0,1} (1 - 3,14) = -214 \text{ мкТл}.$$

Здесь знак минус означает, что в этом случае положительное направление индукции  $B$  противоположено направлению  $\vec{B}_1$  от прямолинейной части проводника, т. е. результирующая индукция магнитного поля направлена **от нас**.

**Ответ:** а)  $B = 414 \text{ мкТл}$ , б)  $B = -214 \text{ мкТл}$ .

**Пример 8.6** Определить силу Лоренца  $\vec{F}_\Lambda$ , действующую на электрон, влетевший со скоростью  $v = 4 \cdot 10^6 \frac{M}{c}$  в однородное магнитное поле под углом  $\alpha = 30^\circ$  к линиям индукции. Магнитная индукция поля  $B = 0,2$  Тл.

**Решение:**

В соответствии с формулой (8.14) модуль силы Лоренца  $F_\Lambda = evB \sin \alpha$ , где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – заряд электрона. Подставив сюда исходные данные, получим

$$F_\Lambda = 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 0,2 \cdot \sin 30^\circ \text{ Н} = 0,64 \cdot 10^{-13} \text{ Н}.$$

Проанализируем условия задачи более детально. Обратимся к рис. 1, на котором векторы  $\vec{F}_\Lambda$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ , входящие в векторное выражение (8.15), изображены в системе

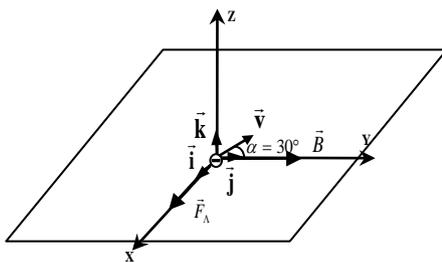


Рис. 1

координат  $(x, y, z)$ . Разложим вектор  $\vec{v}$  по осям  $y$  и  $z$ :

$\vec{v} = \vec{j}v_y + \vec{k}v_z$  ( $\vec{j}$  и  $\vec{k}$  орты координатных осей). Тогда сила Лоренца будет равна

$$F_\Lambda = evB \sin \alpha = ev_z.$$

Модуль вектора скорости  $\vec{v}$  не изменяется т. к.  $\vec{F}_\Lambda \perp \vec{v}$  в любой точке траектории электрона. Но из механики известно, что если вектор постоянной силы перпендикулярен вектору  $\vec{v}$ , то движение частицы происходит по окружности. Следовательно, электрон, влетевший в магнитное поле, будет двигаться по окружности в плоскости, перпендикулярной линиям индукции, со скоростью, равной поперечной составляющей  $v_z$  скорости. Одновременно он будет двигаться и вдоль поля со скоростью  $v_y$ . В результате такого совместного движения электрон будет двигаться по винтовой линии, навивающейся на линии магнитной индукции.

Радиус винтовой линии найдем, записав уравнение движение электрона по второму закону Ньютона

$$F_\Lambda = ma_n = m \frac{v_z^2}{R} = ev_z B.$$

Отсюда  $R = \frac{mv_z}{eB}$  или  $R = \frac{mv \sin \alpha}{eB}$ .

Подставив численные значения, получим

$$R = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \cdot 4 \cdot 10^6 \cdot 0,5}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2} \text{ м} = 57 \cdot 10^{-6} \text{ м},$$

Определим теперь шаг винтовой линии, который равен пути, пройденному электроном вдоль поля со скоростью  $v_y$  за время, равное периоду обращения  $T$  электрона по окружности

$$h = v_y T,$$

где  $T = 2\pi R / v_z$ . С учётом того, что  $v_y = v \cos \alpha$ ,  $v_z = v \sin \alpha$ , окончательно получим

$$h = \frac{2\pi R v_y}{v_z} = 2\pi R \cdot \text{ctg} \alpha.$$

Произведя вычисления, найдём

$$h = 2 \cdot 3,14 \cdot 57 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{3} \text{ м} = 608 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 0,6 \text{ мм}.$$

**Ответ:**  $h = 0,6 \text{ мм}$ .

**Пример 8.7** Электрон, влетев в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,2 \text{ Тл}$ , стал двигаться по окружности радиусом  $R = 5 \text{ см}$ . Определить магнитный момент  $p_m$  эквивалентного кругового тока.

**Решение:**

Согласно определению (8.13) магнитный момент  $p_m = IS$ , где  $I = e/T$ , а  $S = \pi R^2$ . Период обращения электрона равен  $T = 2\pi R/v$ . Скорость движения электрона определим с использованием второго закона Ньютона и силы Лоренца

$$\frac{mv^2}{R} = evB,$$

откуда  $v = \frac{e}{m}RB$ , следовательно, период обращения

$$T = \frac{2\pi R}{(e/m)RB} = \frac{2\pi m}{eB}$$

Подставив это выражение в определяющее соотношение для магнитного момента, найдём

$$p_m = \frac{e}{T} \cdot \pi R^2 = \frac{e^2 B \cdot \pi R^2}{2\pi m} = \frac{e^2 R^2 B}{2m}$$

После подстановки данных, получим

$$p_m = \frac{1,6^2 \cdot 10^{-38} \cdot 5^2 \cdot 10^{-4} \cdot 0,2}{2 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31}} \text{ А} \cdot \text{м}^2 = 0,7 \cdot 10^{-11} \text{ А} \cdot \text{м}^2.$$

**Ответ:**  $p_m = 0,7 \cdot 10^{-11} \text{ А} \cdot \text{м}^2$ .

**Пример 8.8** Перпендикулярно магнитному полю с индукцией  $B = 0,1 \text{ Тл}$  возбуждено электрическое поле напряженностью  $E = 100 \text{ кВ/м}$ . Перпендикулярно обеим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Вычислить скорость частицы.

**Решение:**

Условия задачи иллюстрирует рис. 1.

На частицу с положительным зарядом  $q$  действует электрическая сила  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  и сила Лоренца  $\vec{F}_\Lambda = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ . Так как по условию задачи скорость частицы  $\vec{v} = \text{const}$ , то эти силы согласно первому закону Ньютона должны компенсировать друг друга. Поэтому направления векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$  не могут быть произвольными – они должны удовлетворять записанным выше векторным выражениям для сил  $\vec{F}_e$  и  $\vec{F}_\Lambda$ . Проекция этих сил на ось  $y$  дадут уравнение

$$qvB - qE = 0,$$

откуда

$$v = \frac{E}{B}.$$

После подстановки числовых значений, получим

$$v = \frac{100 \cdot 10^3}{0,1} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

**Ответ:**  $v = 1 \cdot 10^6 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ .

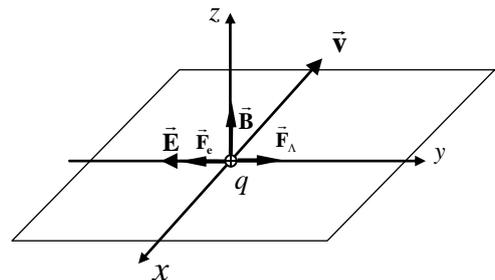


Рис. 1

**Пример 8.9** Квадратная проволочная рамка расположена в одной плоскости с длинным прямым проводом так, что две её стороны параллельны проводу. По рамке и проводу текут одинаковые токи  $I = 1 \text{ кА}$ . Определить силу  $F$ , действующую на рамку, если ближайшая к проводу сторона находится на расстоянии, равном её длине  $a$ .

**Решение:**

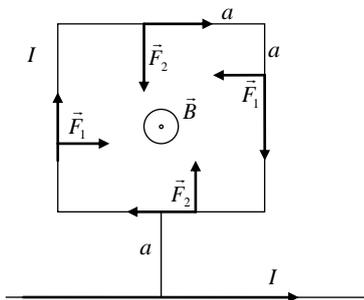


Рис. 1

На каждую из сторон рамки действуют силы Ампера –  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_1'$  на боковые стороны,  $\vec{F}_2$  и  $\vec{F}_2'$  – на нижнюю и верхнюю стороны. Рамка находится в неоднородном магнитном поле прямолинейного тока  $I$ , создающего в плоскости рамки индукцию  $\vec{B}$ , направление которой показано на рис. 1 символом  $\odot$ . Силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_1'$ , действующие на боковые стороны рамки, взаимно компенсируются, т.к. каждая из них ориентирована по отношению к прямому проводу одинаково. На нижнюю и верхнюю стороны рамки будут действовать разные силы, т.к. их удаление от провода разное, следовательно, будут разные и значения индукции поля в месте их расположения.

Для нижней стороны рамки индукция поля  $B_2$ . Из формулы (8.6)

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{a},$$

а для верхней стороны

$$B_2' = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{2a}.$$

Тогда согласно закону (8.19) соответствующие силы Ампера равны

$$F_2 = IaB_2 = Ia \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{a} = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2;$$

$$F_2' = IaB_2' = Ia \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{2a} = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2.$$

Результирующая сила, действующая на рамку,

$$F = F_2 - F_2' = \frac{\mu_0}{2\pi} I^2 - \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2.$$

Расчёт даёт численное значение  $F = 0,1 \text{ Н}$ .

**Ответ:**  $F = 0,1 \text{ Н}$ .

**Пример 8.10** Вычислить циркуляцию вектора индукции вдоль контура, охватывающего токи  $I_1 = 10 \text{ А}$ ,  $I_2 = 15 \text{ А}$ , текущие в одном направлении, и ток  $I_3 = 20 \text{ А}$ , текущий в противоположном направлении.

**Решение:**

Согласно теореме (8.26) о циркуляции вектора магнитной индукции запишем

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 (I_1 + I_2 - I_3).$$

Подставив численные значения токов, найдем

$$\oint \vec{B} d\vec{l} = 4\pi \cdot 10^{-7} (10 + 15 - 20) \text{ Тл} \cdot \text{м} = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м}.$$

**Ответ:**  $\oint \vec{B} d\vec{l} = 6,28 \cdot 10^{-6} \text{ Тл} \cdot \text{м}.$

**Пример 8.11** Квадратная рамка амперметра со стороной  $a = 2$  см, содержащая  $N = 100$  витков тонкого провода, с прикрепленной к нему спиральной пружиной, закреплена на оси. Постоянная закручивания пружины  $C = 10$  мкН·м/град. В положении равновесия рамки пружина не деформирована, а плоскость рамки совпадает с направлением линий индукции магнитного поля, создаваемого между полюсами подковообразного магнита. Определить угол поворота рамки  $\varphi$  при пропускания по ней тока  $I = 1$  А, если индукция поля магнита в месте расположения рамки  $B = 30$  мТл. Поле считать однородным.

**Решение:**

При пропускании по виткам рамки тока возникает вращающий механический момент, обусловленный действием магнитного поля постоянного магнита. В соответствии с условиями задачи его значение имеет максимальную величину  $M_{\max} = p_m B$ , где  $p_m = INS$  – магнитный момент рамки с током. Под его действием рамка начинает поворачиваться вокруг оси, на которой она закреплена. Тотчас возникает противодействующий момент упругих сил спиральной пружины, пропорциональный углу поворота рамки

$$M_{\text{упр}} = C\varphi.$$

Равновесие рамки наступает при таком угле поворота, при котором эти два момента станут равными

$$M_{\max} = M_{\text{упр}},$$

или

$$p_m B \sin \alpha = C\varphi,$$

где  $\alpha$  – угол между магнитным моментом  $\vec{p}_m$  и вектором индукции  $\vec{B}$ ,  $\varphi$  – угол закручивания спиральной пружины, отсчитываемый от начального направления магнитного момента  $\vec{p}_m$ . В этот начальный момент действует только момент  $M_{\max}$ , когда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , поэтому ясно, что  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ; с учетом этой связи условие равновесие рамки принимает вид

$$p_m B \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = C\varphi,$$

или

$$p_m B \cos \varphi = C\varphi.$$

С использованием выражения  $p_m = INS = INa^2$ , получим уравнение

$$INa^2 B \cos \varphi = C\varphi$$

откуда

$$\frac{\varphi}{\cos \varphi} = \frac{INa^2 B}{C}.$$

При расчете следует выразить постоянную закручивания  $C$  в системе СИ, т.е. в  $\left[\frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}\right]$ :

$$C = 10 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{град}} = 10 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{180}{3,14} = 573 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{рад}}.$$

Тогда

$$\frac{\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1 \cdot 100 \cdot 4 \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-3} \cdot 30}{573 \cdot 10^{-6}} = 2,09$$

Решая это уравнение графически, найдем  $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ .

**Ответ:**  $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$ .

**Пример 8.12** Плоская квадратная рамка со стороной  $l = 20$  см лежит в одной плоскости с бесконечно длинным проводом, по которому течет ток  $I = 100$  А. Рамка расположена так, что ближайшая к проводу сторона параллельна ему и находится на расстоянии  $a = 10$  см от провода. Определить магнитный поток  $\Phi$ , пронизывающий рамку.

**Решение:**

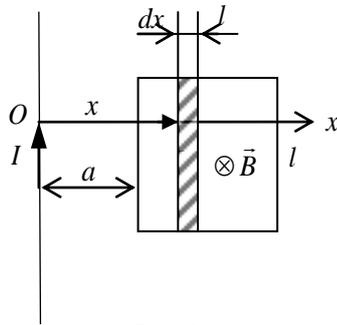


Рис. 1

Линии индукции магнитного поля, создаваемого током  $I$  перпендикулярны к плоскости рамки, но величина индукции на разных удалениях от провода согласно выражению (8.6) будет различна. Поэтому непосредственное использование формулы (8.22 а) будет неправомерно. Обратимся к рис.1. Выделим элемент площади рамки  $ds = ldx$ , в пределах которой индукция  $B(x) = const$ . В соответствии с формулой (8.6) индукция  $B$  на расстоянии  $x$  от провода равна

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I}{x}$$

Следовательно, элементарный поток

$$d\Phi_m = B(x)dS = B(x)ldx = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \cdot \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя по всей площади рамки, определим

$$\Phi_m = \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln x \Big|_a^{a+l} = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{a+l}{a}$$

Подставив данные, получим

$$\Phi_m = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot 0.2}{2\pi} \cdot \ln 3 \text{ Вб} = 4.4 \cdot 10^{-6} \text{ Вб} = 4,4 \text{ мкВб}.$$

**Ответ:**  $\Phi_m = 4,4 \text{ мкВб}$ .

**Пример 8.13** Магнитный поток  $\Phi = 40$  мВб пронизывает замкнутый контур. Определите среднее значение ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ , возникающей в контуре, если магнитный поток изменится до нуля за время  $\Delta t = 2$  мс.

**Решение:**

В соответствии с законом электромагнитной индукции (8.39) среднее значение ЭДС индукции можно записать в виде

$$\langle \mathcal{E}_i \rangle = - \frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t},$$

где  $\Delta \Phi_m = \Phi_2 - \Phi_1$  – разность магнитных потоков, пронизывающих контур в конечном и

начальном состояниях. По условию  $\Phi_2 = 0$ , следовательно  $\langle \mathcal{E}_i \rangle = - \frac{\Delta \Phi_m}{\Delta t} = \frac{40 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 10^{-3}} \text{ В} = 20 \text{ В}$ .

**Ответ:**  $\langle \mathcal{E}_i \rangle = 20 \text{ В}$ .

**Пример 8.14** По обмотке соленоида индуктивностью  $L = 0,2$  Гн течет ток  $I = 10$  А. Определить энергию  $W_m$  магнитного поля соленоида.

**Решение:**

Задача решится в одно действие при использовании формулы  $W_m = \frac{LI^2}{2}$ .

Численный расчет по этой формуле дает  $W_m = \frac{0,2 \cdot 10^2}{2} \text{ Дж} = 10 \text{ Дж}$ .

**Ответ:**  $W_m = 10 \text{ Дж}$ .

**Пример 8.15** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,4 \text{ Тл}$  в плоскости, перпендикулярной линиям индукции поля, вращается стержень длиной  $l = 10 \text{ см}$ . Ось вращения проходит через один из концов стержня. Определите разность потенциалов  $U$  на концах стержня при частоте вращения  $n = 16 \text{ с}^{-1}$ .

**Решение:**

Если выделить в области магнитного поля секториальный контур  $dS$ , плоскость которого перпендикулярна линиям магнитной индукции, (рис.1), то при вращении проводника со скоростью  $\omega$  он за время  $dt$  создаст приращение магнитного потока

$$d\Phi_m = B dS = \frac{1}{2} l^2 B d\varphi.$$

Отсюда скорость изменения магнитного потока

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{2} l^2 B \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{2} l^2 B \omega.$$

По закону электромагнитной индукции она численно равна ЭДС индукции, возникающей во вращающемся стержне, т.е. разности потенциалов между концами стержня.

$$U = \frac{1}{2} l^2 B (2\pi n) = \pi n B l^2.$$

Подставив данные, найдем  $U = 3,14 \cdot 16 \cdot 0,4 \cdot 0,1^2 \text{ В} = 201 \text{ мВ}$

**Ответ:**  $U = 201 \text{ мВ}$ .

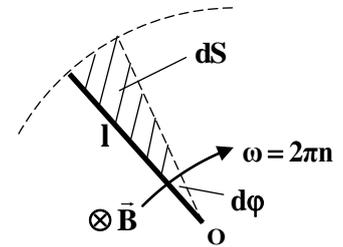


Рис.1

**Пример 8.16** С помощью реостата равномерно увеличивают силу тока в катушке на  $\Delta I = 0,1 \text{ А}$  за  $1 \text{ с}$ . Индуктивность катушки равна  $L = 0,01 \text{ Гн}$ . Найти среднее значение ЭДС самоиндукции  $\langle \varepsilon_s \rangle$ .

**Решение:**

В соответствии с формулой (8.44) ЭДС самоиндукции равна  $\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$ .

Так как по условию задачи скорость изменения тока постоянна, то  $\langle \varepsilon_s \rangle = \left| -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|$

где  $\Delta t = 0,1 \text{ с}$ . Подставив численные значения, найдем  $\langle \varepsilon_s \rangle = 0,01 \cdot \frac{0,1}{1} \text{ В} = 1 \text{ мВ}$

**Ответ:**  $\langle \varepsilon_s \rangle = 1 \text{ мВ}$ .

**Пример 8.17** Обмотка тороида с немагнитным сердечником имеет  $n = 10$  витков на каждый сантиметр длины. Определите объемную плотность энергии магнитного поля  $w_m$ , если по обмотке течет ток  $I = 16 \text{ А}$ .

**Решение:**

Для расчета воспользуемся формулами (8.54) и (8.27):

$$w_m = B^2 / 2\mu_0; \quad B = \mu_0 n I.$$

Подставляя вторую из них в первую, получим

$$w_m = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}.$$

После подстановки численных значений, определим

$$w_m = \frac{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 10^2 \cdot 10^4 \cdot 16^2}{2} \text{ Дж / м}^3 = 161 \text{ Дж / м}^3$$

**Ответ:**  $w_m = 161 \text{ Дж / м}^3$ .

**Пример 8.18** Индуктивность  $L$  катушки равна 2мГн. Ток частотой  $\nu=50$ Гц, протекающий по катушке, изменяется по синусоидальному закону. Определите среднюю ЭДС самоиндукции  $\langle \varepsilon_s \rangle$ , возникающую за интервал времени  $\Delta t$ , в течении которого ток в катушке изменяется от минимального до максимального значения. Амплитудное значение силы тока  $I_m = 10$ А.

**Решение:**

При синусоидальном законе изменения силы тока в катушке производная  $dI/dt$  в формуле (8.44) равна

$$dI/dt = I_m \omega \cos \omega t.$$

Поэтому ЭДС самоиндукции

$$|\varepsilon_s| = I_m \omega L \cos \omega t.$$

Её среднее значение в интервале времени от 0 до  $T/4$  равно

$$\langle \varepsilon_s \rangle = I_m \omega L \langle \cos \omega t \rangle \Big|_0^{T/4}.$$

Среднее значение  $\langle \cos \omega t \rangle$  рассчитывается по известной формуле среднего значения функции

$$\langle \cos \omega t \rangle = \frac{1}{T/4} \int_0^{T/4} \cos \omega t dt$$

После вычисления этого интеграла, найдем  $\langle \cos \omega t \rangle = \frac{2}{\pi}$

Подставив в формулу для  $\langle \varepsilon_s \rangle$ , получим  $\langle \varepsilon_s \rangle = I_m L \cdot 2\pi\nu \frac{2}{\pi} = 4I_m L \nu$ .

В результате расчета, найдем  $\langle \varepsilon_s \rangle = 4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \text{ В} = 4 \text{ В}$ .

**Ответ:**  $\langle \varepsilon_s \rangle = 4 \text{ В}$

**Пример 8.19** Сколько витков проволоки диаметром  $d = 0,4$  мм с изоляцией ничтожной толщины нужно намотать на картонный цилиндр диаметром  $D = 2$ см, чтобы получить однослойную катушку с индуктивностью  $L = 1$ мГн? Витки вплотную прилегают друг к другу.

**Решение:**

Будем считать такую катушку соленоидом, индуктивность которого выражается согласно формуле (8.52) в виде

$$L = \mu \mu_0 n^2 V.$$

Так как ферромагнитный сердечник отсутствует, то магнитная проницаемость  $\mu = 1$ . Объем соленоида  $V = Sl = \pi D^2 / 4 \cdot l$ , а число витков катушки  $N = nl$ . Тогда ее индуктивность выражается формулой

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l^2} \cdot \frac{\pi D^2}{4} \cdot l = \mu_0 \frac{N^2}{l} \cdot \frac{\pi D^2}{4}.$$

На длине соленоида  $L$  укладывается число витков  $N = l/d$ , откуда  $l = Nd$ . Подставив это значение в формулу для  $L$ , найдем

$$L = \mu_0 \frac{N}{d} \cdot \frac{\pi D^2}{4}.$$

Отсюда получим окончательно  $N = \frac{4Ld}{\mu_0 \pi D^2}$

После постановки численных значений найдем  $N = \frac{4 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot 0,4 \cdot 10^{-3}}{4 \cdot 3,14 \cdot 10^{-7} \cdot 3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} = 1013$ .

**Ответ:**  $N = 1013$ .

**Пример 8.20** Соленоид содержит  $N = 1000$  витков. Сила тока  $I$  в его обмотке равна 1А, магнитный поток  $\Phi_m$  через поперечное сечение соленоида равен 0,1мВб. Вычислить энергию  $W_m$  магнитного поля.

**Решение:**

Чтобы применить формулу (8.49), сначала надо определить индуктивность соленоида. Она равна отношению потокосцепления  $\Psi_m$  к силе тока  $I$ :  $L = \Psi_m / I = N\Phi_m / I$ .

Тогда на основании (8.49), получим  $W_m = \frac{N\Phi_m I^2}{2I} = \frac{N\Phi_m I}{2}$ .

После расчета найдем  $W_m = \frac{1000 \cdot 0.1 \cdot 10^{-3} \cdot 1}{2} \text{ Дж} = 0.05 \text{ Дж}$ . **Ответ:**  $W_m = 0.05 \text{ Дж}$ .

### Задачи для самостоятельной работы

**Задача 8.1** По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток  $I = 50$  А. Определить магнитную индукцию  $B$  в точке, удаленной на расстояние  $r = 5$  см от проводника.

**Ответ:**  $B = 200 \text{ мкТл}$ .

**Задача 8.2** Напряженность  $H$  магнитного поля в центре круговой витка равна 200 А/м. Магнитный момент  $p_m$  витка равен 1 А·м<sup>2</sup>. Вычислить силу тока  $I$  в витке и радиус  $R$  витка.

**Ответ:**  $I = 37 \text{ А}$ .

**Задача 8.3** По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам текут токи  $I_1 = 20$  А и  $I_2 = 30$  А в одном направлении. Расстояние  $d$  между проводами равно 10 см. Вычислить магнитную индукцию  $B$  в точке, удаленной от обоих проводов на одинаковое расстояние по 10 см. **Ответ:**  $B = 87 \text{ мкТл}$ .

**Задача 8.4** Вычислить радиус  $R$  дуги окружности, которую описывает протон в магнитном поле с индукцией  $B = 15$  мТл, если скорость протона равна 2 Мм/с. **Ответ:**  $R = 1.38 \text{ м}$

**Задача 8.5** Прямой провод, по которому течет ток 1 кА, расположен в однородном магнитном поле перпендикулярно линиям индукции. С какой силой  $F$  действует поле на отрезок провода длиной  $l = 1$  м если магнитная индукция  $B$  равна 1 Тл? **Ответ:**  $F = l \frac{\kappa H}{m}$ .

**Задача 8.6** В однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл находится прямой провод длиной  $l = 8$  см, расположенный перпендикулярно линиям индукции. По проводу течет ток  $I = 2$  А. Под действием сил поля провод переместился на расстояние  $s = 5$  см. Найти работу  $A$  сил поля. **Ответ:**  $A = 80 \text{ мкДж}$

**Задача 8.7** Перпендикулярно магнитному полю индукцией 0.1 Тл возбуждено электрическое поле напряженностью  $E = 100$  кВ/м. Перпендикулярно обоим полям движется, не отклоняясь от прямолинейной траектории, заряженная частица. Определите скорость частицы. **Ответ:**  $\frac{E}{B} = l \frac{Mm}{c}$ .

**Задача 8.8** Проволочный виток радиусом  $R = 5$  см находится в однородном магнитном поле напряженностью  $H = 2$  кА/м. Плоскость витка образует угол  $\alpha = 60^\circ$  с направлением поля. По витку течет ток  $I = 4$  А. Найти механический момент сил  $M$ , действующий на виток.

**Ответ:**  $M = 39.5 \cdot 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{м}$

**Задача 8.9** Плоский контур, площадь  $S$  которого равна 300 см<sup>2</sup>, находится в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл. Плоскость контура перпендикулярна линиям индукции. В контуре поддерживается неизменный ток  $I = 10$  А. Определить работу  $A$  внешних сил по перемещению контура с током в область пространства, магнитное поле в которой отсутствует. **Ответ:**  $A = 3 \text{ мДж}$ .

**Задача 8.10** Силу тока в катушке равномерно увеличивают при помощи реостата на 0,1 А в секунду. Найти среднее значение ЭДС самоиндукции, если индуктивность катушки 10 мГн. **Ответ:**  $\langle \mathcal{E}_{сам} \rangle = 1 \text{ мВ}$ .