

## 9. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

### § 9.1 Гармонические колебания и их характеристики

**Колебаниями** называются процессы, характеризующиеся определенной повторяемостью во времени.

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике, например, качание маятника часов, переменный электрический ток и т. д. При колебательном движении маятника изменяется координата его центра масс, в случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Физическая природа колебаний может быть разной, поэтому различают колебания механические, электромагнитные и др. Однако различные колебательные процессы описываются одинаковыми характеристиками и одинаковыми уравнениями.

Колебания называются **свободными** (или **собственными**), если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему (систему, совершающую колебания). Простейшим типом колебаний являются **гармонические колебания** — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса.

Рассмотрение гармонических колебаний важно по двум причинам:

1) колебания, встречающиеся в природе и технике, часто имеют характер, близкий к гармоническому,

2) различные периодические процессы (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) можно представить как наложение гармонических колебаний. Гармонические колебания величины  $s$  описываются уравнением типа

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.1)$$

где  $A$  - **амплитуда колебания**, т.е., максимальное значение колеблющейся величины,

$\omega_0$  - **круговая** или **циклическая частота**,  $\varphi_0$  - **начальная фаза колебаний** в момент времени  $t = 0$ ,  $(\omega_0 t + \varphi)$  — **фаза колебаний в момент времени  $t$** .

Фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до -1, то  $s$  может принимать значения от  $+A$  до  $-A$ .

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени  $T$ , называемый **периодом колебания**, за который фаза колебания получает приращение  $2\pi$ , то есть

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi$$

откуда

$$T = 2\pi / \omega_0 \quad (9.2)$$

Величина, обратная периоду колебаний,

$$\nu = 1/T \quad (9.3)$$

т.е. **число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется частотой колебаний**. Сравнивая (9.2) и (9.3), получим

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Единица частоты - **герц** (Гц): 1 Гц - частота периодического колебания, при которой за 1 с совершается одно полное колебание.

Запишем первую и вторую производные по времени от гармонически колеблющейся величины  $s$  (соответственно скорость и ускорение):

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (9.4)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad (9.5)$$

т. е. имеем гармонические колебания с той же циклической частотой. Амплитуды величин (9.4) и (9.5) соответственно равны  $A\omega_0$  и  $A\omega_0^2$ . Фаза скорости (9.4) отличается от фазы величины (9.1) на  $\pi/2$ , а фаза ускорения (9.5) отличается от фазы величины (9.1) на  $\pi$ .

Следовательно, в моменты времени, когда  $s = 0$ ,  $\frac{ds}{dt}$  приобретает наибольшие значения. Когда же  $s$  достигает максимального отрицательного значения, то  $\frac{d^2s}{dt^2}$  приобретает наибольшее положительное значение.

Из выражения (9.5) следует **дифференциальное уравнение гармонических колебаний**:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0 \quad (9.6)$$

(где учтено, что  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ). Решением этого уравнения является выражение (9.1).

Гармонические колебания изображаются графически **методом векторных диаграмм**. Для этого из произвольной точки  $O$ , выбранной на оси  $x$ , под углом  $\varphi$ , равным начальной фазе колебания, откладывается вектор  $A$ , модуль которого равен амплитуде  $A$  рассматриваемого колебания (рис. 9.1). Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью  $\omega_0$ , равной циклической частоте колебаний, то проекция конца вектора будет перемещаться по оси  $x$  и принимать значения от  $-A$  до  $+A$ , а колеблющаяся величина будет изменяться со временем по закону  $s = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ .

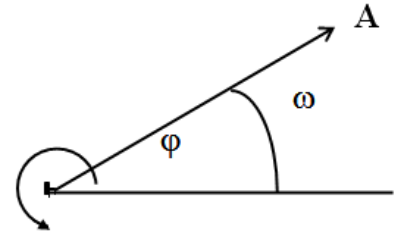


Рис. 9.1

Таким образом, гармоническое колебание можно представить проекцией на некоторую произвольно выбранную ось вектора амплитуды  $A$ , отложенного из произвольной точки оси под углом  $\varphi$ , равным начальной фазе, и вращающегося с угловой скоростью  $\omega_0$  вокруг этой точки.

В физике часто применяется другой метод, который отличается от метода вращающегося вектора амплитуды лишь по форме. В этом методе колеблющуюся величину представляют комплексным числом. Согласно формуле Эйлера, для комплексных чисел

$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (9.7)$$

где  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица. Поэтому уравнение гармонического колебания (9.1) можно записать в комплексной форме так:

$$\tilde{s} = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (9.8)$$

Вещественная часть выражения (9.8)

$$\operatorname{Re}(\tilde{s}) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = s$$

представляет собой гармоническое колебание. Обозначение  $\operatorname{Re}$  вещественной части условимся опускать и (9.8) будем записывать в виде

$$s = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}.$$

В теории колебаний принимается, что колеблющаяся величина  $s$  равна вещественной части комплексного выражения, стоящего в этом равенстве справа.

## § 9.2 Механические гармонические колебания

Пусть материальная точка совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат  $x$  около положения равновесия, принятого за начало координат. Тогда зависимость координаты  $x$  от времени задается уравнением, аналогичным уравнению (9.1), где  $s = x$ :

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.9)$$

Согласно выражениям (9.4) и (9.5) скорость  $v$  и ускорение  $a$  колеблющейся точки соответственно равны

$$\begin{aligned} v &= -A \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi), \\ a &= -A \omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (9.10)$$

Сила  $F = ma$  действующая на колеблющуюся материальную точку массой  $m$ , с учетом (9.9) и (9.10) равна

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Следовательно, сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия материальной точки, совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.11)$$

или

$$T = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (9.12)$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания под действием упругой силы  $F$ , равна

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.13)$$

или

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (5.14)$$

Сложив (9.11) и (9.13), получим формулу для полной механической энергии:

$$E = T + \Pi = mA^2\omega_0^2 / 2 \quad (9.15)$$

Так как при гармонических колебаниях выполняется закон сохранения механической энергии, поскольку упругая сила консервативна, то полная механическая энергия при гармонических колебаниях остается постоянной.

Из формул (9.12) и (9.14) следует, что  $T$  и  $\Pi$  изменяются с частотой  $2\omega_0$ , т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.

На рис. 9.2 представлены графики зависимости  $x$ ,  $T$  и  $\Pi$  от времени. Так как  $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = 1/2$ , то из формул (9.11), (9.13) и (9.15) следует, что  $\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = 1/2 E$ .

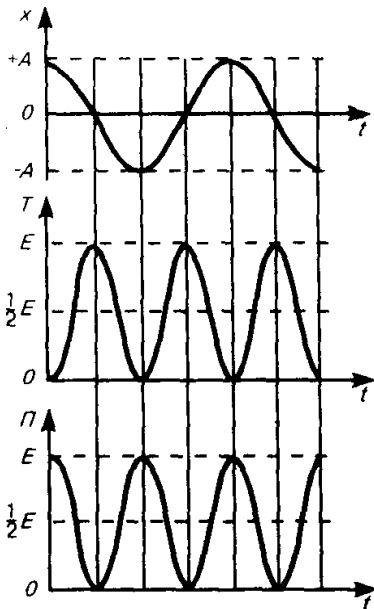


Рис. 9.2

### § 9.3 Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

**Гармоническим осциллятором** называется система, совершающая колебания, изменяющиеся по гармоническому закону и описываемые уравнением вида (9.1):

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0. \quad (9.16)$$

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники, колебательный контур.

1. **Пружинный маятник** — это груз массой  $m$ , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы  $F = -kx$ , где  $k$  — коэффициент упругости, в случае пружины называемый **жесткостью**.

Уравнение движения маятника

$$m\ddot{x} = -kx,$$

или

$$\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0.$$

Пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad (9.17)$$

и периодом

$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \quad (9.18)$$

Формула (9.18) справедлива для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука и когда масса пружины мала по сравнению с массой тела.

Потенциальная энергия пружинного маятника, согласно (9.13) и (9.17), равна  $\Pi = kx^2/2$ .

2. **Физический маятник** - это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку  $O$ , не совпадающую с центром масс  $C$  тела (рис. 9.3).

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол  $\alpha$ , то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела момент возвращающей силы  $M$  можно записать в виде

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha, \quad (9.18)$$

где  $J$  - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса  $O$ ,  $l$  — расстояние между ней и центром масс маятника,  $F = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha$  — возвращающая сила (знак минус обусловлен тем, что направления  $F_\tau$  и  $\alpha$  всегда противоположны;  $\sin \alpha \approx \alpha$  соответствует малым колебаниям маятника, т. е. малым отклонениям маятника из положения равновесия).

Уравнение (9.18) можно записать в виде

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0,$$

или

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Принимая

$$\omega_0 = \sqrt{mgl/J} \quad (9.19)$$

получим уравнение идентичное с (9.16), решение которого известно:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.20)$$

Из выражения (9.19) следует, что при малых колебаниях физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой  $\omega_0$  и периодом

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g}, \quad (9.21)$$

где  $L = J/(ml)$  - **приведенная длина физического маятника**.

3. **Математический маятник** - это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой  $m$ , подвешенной на невесомой нерастяжимой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.

Хорошим приближением математического маятника является небольшой тяжелый шарик, подвешенный на тонкой длинной нити. Момент инерции математического маятника

$$J = ml^2, \quad (9.22)$$

где  $l$  — длина маятника.

Так как математический маятник можно представить как частный случай физического маятника, предположив, что вся его масса сосредоточена в одной точке — центре масс, то, подставив выражение (9.22) в формулу (9.21), получим выражение для периода малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \quad (9.23)$$

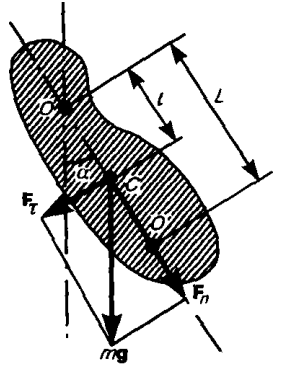


Рис. 9.3

Сравнивая формулы (9.21) и (9.23), видим, что если приведенная длина  $L$  физического маятника равна длине  $l$  математического маятника, то периоды колебаний этих маятников одинаковы. Следовательно, **приведённая длина физического маятника** - это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

#### §9.4 Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

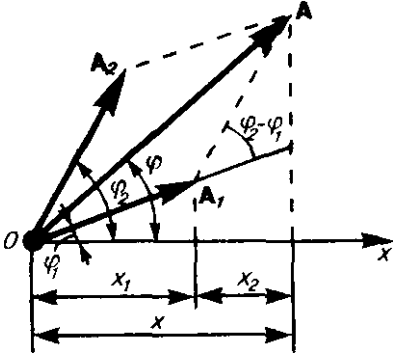


Рис. 9.4

Колеблющееся тело может одновременно участвовать в нескольких колебательных процессах. Иногда бывает необходимо найти уравнение результирующего колебания. Если колебания происходят в одном направлении, то удобно воспользоваться методом векторных диаграмм. Иными словами, колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Построим векторные диаграммы этих колебаний (рис.9.4).

Так как векторы  $A_1$  и  $A_2$  вращаются с одинаковой угловой скоростью  $\omega_0$ , то разность фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  между ними остается постоянной. Очевидно, что уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (9.24)$$

В выражении (9.24) амплитуда  $A$  и начальная фаза  $\varphi$  находятся из рис. 9.4 и соответственно задаются соотношениями

$$\begin{aligned} A^2 &= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2); \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{aligned} \quad (9.25)$$

Таким образом, тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания. Амплитуда результирующего колебания зависит от разности фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  складываемых колебаний.

Проанализируем выражение (9.25) в зависимости от разности фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$ :

1)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$  ( $m = 1, 0, 2, \dots$ ), тогда  $A = A_1 + A_2$ , т. е. амплитуда результирующего колебания  $A$  равна сумме амплитуд складываемых колебаний;

2)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm (2m + 1)\pi$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), тогда  $A = |A_1 - A_2|$ , т. е. амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний.

Для практики особый интерес представляет случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения этих колебаний получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой.

*Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются биениями.*

Пусть амплитуды складываемых колебаний равны  $A$ , а частоты равны  $\omega$  и  $\omega + \Delta\omega$ , причем  $\Delta\omega \ll \omega$ . Начало отсчета выберем так, чтобы начальные фазы обоих колебаний были равны нулю:

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t, \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t \end{cases}$$

Складывая эти выражения и учитывая, что во втором сомножителе  $\Delta\omega/2 \ll \omega$ , получим

$$x = \left( 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t \quad (9.26)$$

Так как  $\Delta\omega \ll \omega$ , то множитель, стоящий в скобках, почти не изменяется, когда множитель  $\cos \omega t$  совершит несколько полных колебаний. Поэтому результирующее колебание  $x$  (9.26) можно рассматривать как гармоническое с частотой  $\omega$ , амплитуда  $A_0$  которого изменяется по следующему периодическому закону:

$$A_0 = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|. \quad (9.27)$$

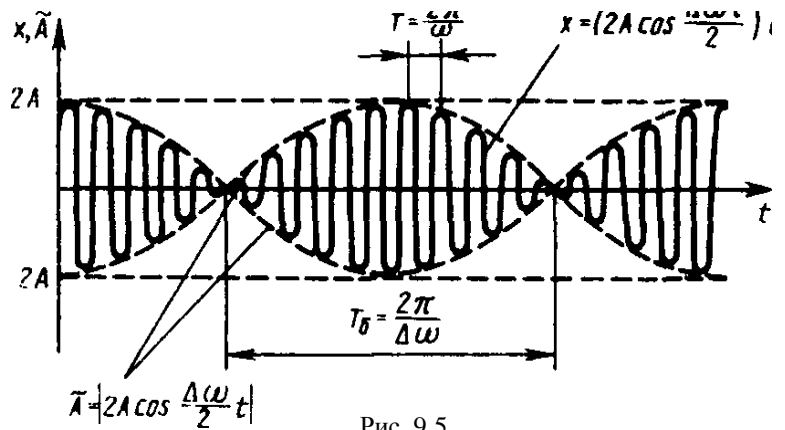


Рис. 9.5

Частота изменения  $A_0$  в два раза больше частоты изменения косинуса (так как берется по модулю), т. е. частота биений равна разности частот складываемых колебаний  $\Delta\omega = \omega_0$ :

$$\text{Период биений} \quad T_0 = 2\pi / \Delta\omega$$

Характер зависимости (9.26) показан на рис.9.5, где сплошные жирные линии дают график результирующего колебания (9.26), а огибающие их — график медленно меняющейся по уравнению (9.27) амплитуды.

Определение частоты тона биений между эталонным и измеряемым колебаниями — наиболее широко применяемый на практике метод сравнения измеряемой величины с эталонной. Метод биений используется для настройки музыкальных инструментов, анализа слуха и т. д.

Любые сложные периодические колебания  $s = f(t)$  можно представить в виде суперпозиции (суммы) одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, начальными фазами, а также частотами, кратными циклической частоте  $\omega_0$ :

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (9.28)$$

Представление периодической функции в виде (9.28) связывают с понятием гармонического анализа сложного периодического колебания и называют **разложением в ряд Фурье**. Слагаемые ряда Фурье, определяющие гармонические колебания с частотами  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ , называются первой (или основной), второй, третьей и т. д. гармониками сложного периодического колебания. Совокупность амплитуд и частот, на которые разлагается любое негармоническое колебания, образуют **спектр**

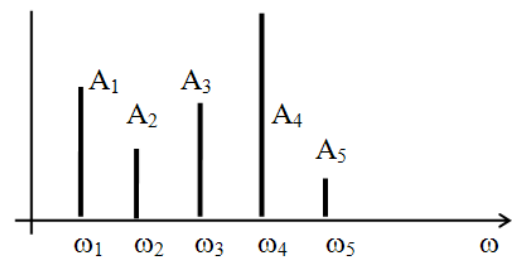


Рис. 9.6

этого колебания. Графическое изображение спектра приведено на рис. 9.6. Как видно из рисунка, каждая составляющая спектра изображается в виде вертикальных линий, основание которых расположено в соответствующих местах оси частот, а длина каждой из линий пропорциональна величине амплитуды выбранной гармоники. Не следует думать, однако, что спектральное разложение имеет только математический смысл. В реальных физических процессах, зависящих от времени, всегда удастся выделить гармонические колебания, частота и амплитуда которых полностью соответствуют гармоникам разложения в ряд Фурье.

### § 9.5 Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты  $\omega$ , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей  $x$  и  $y$ . Для простоты начало отсчета выберем так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю, и запишем

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t, \\ y = B \cos(\omega t + \varphi) \end{cases} \quad (9.29)$$

Разность фаз обоих колебаний равна  $\varphi$ ,  $A$  и  $B$  — амплитуды складываемых колебаний. Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений (9.29) параметра  $t$ . Записывая складываемые колебания в виде

$$x/A = \cos \omega t;$$

$$y/B = \cos(\omega t + \varphi) = \cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi$$

и заменяя во втором уравнении  $\cos \omega t$  на  $x/A$  и  $\sin \omega t$  на  $\sqrt{1 - (x/A)^2}$ , получим после несложных преобразований уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \varphi + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \varphi. \quad (9.30)$$

Так как траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, то такие колебания называются **эллиптически поляризованными**.

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз  $\varphi$  (рис.9.7). Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

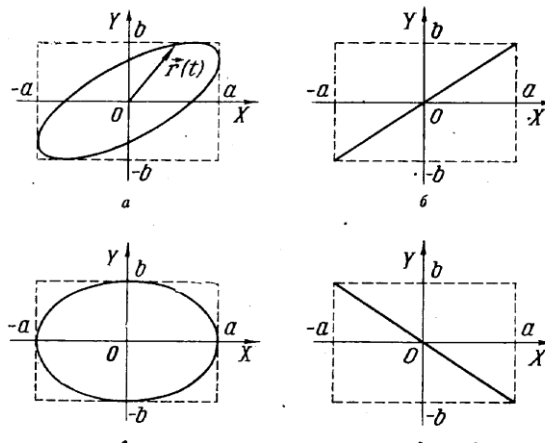


Рис. 9.7

1)  $\varphi = m\pi$ , ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ). В данном случае эллипс вырождается в отрезок прямой

$$y = \pm(B/A)x, \quad (9.31)$$

где знак плюс соответствует нулю и четным значениям  $m$  (рис. 9.7, б), а знак минус — нечетным значениям  $m$  (рис. 9.7, в). Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой  $\omega$  и амплитудой  $\sqrt{A^2 + B^2}$ , совершающимся вдоль прямой, составляющей с осью  $x$  угол  $\varphi = \arctg\left(\frac{B}{A} \cos m\pi\right)$ . В данном случае имеем дело с линейно поляризованными колебаниями.

2)  $\varphi = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$ , ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ).

В данном случае уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1. \quad (9.32)$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат, а его полуоси равны соответствующим амплитудам (рис. 9.10,в). Кроме того, если  $A=B$ , то эллипс (9.32) вырождается в окружность. Такие колебания называются **циркулярно поляризованными колебаниями** или **колебаниями, поляризованными по кругу**.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результирующего колебания довольно сложна. *Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются фигурами Лиссажу*. Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний. Для некоторых соотношений частот складываемых колебаний получающиеся фигуры, называемые фигурами Лиссажу, показаны на рис. 9.8.

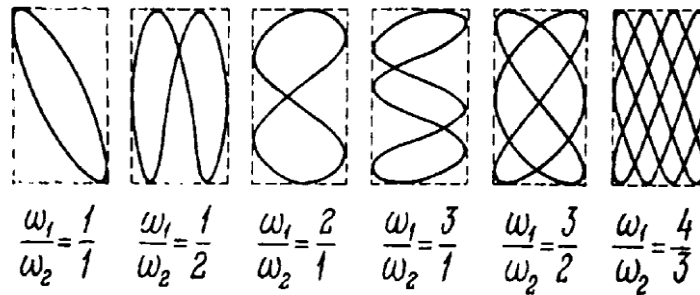


Рис. 9.8

Отношение частот складываемых колебаний равно отношению максимального числа пересечений фигур Лиссажу с прямыми, параллельными осям координат. По виду фигур можно определить неизвестную частоту по известной частоте или определить отношение частот складываемых колебаний. Поэтому анализ фигур Лиссажу — широко используемый метод исследования соотношений частот и разности фаз складываемых колебаний, а также формы колебаний.

## § 9.6 Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение

Рассмотрим **свободные затухающие колебания** - колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются. Простейшим механизмом уменьшения энергии колебаний является ее превращение в теплоту вследствие трения в механических колебательных системах.

Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем. Обычно рассматривают **линейные системы** — идеализированные реальные системы, в которых параметры, определяющие физические свойства системы, в ходе процесса не изменяются. Линейными системами являются, например, пружинный маятник при малых растяжениях пружины (когда справедлив закон Гука). Различные по своей природе линейные системы описываются идентичными линейными дифференциальными уравнениями, что позволяет подходить к изучению колебаний различной физической природы с единой точки зрения.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы задается в виде

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0, \quad (9.33)$$

где  $s$  — колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс,  $\delta = const$  — коэффициент затухания,  $\omega_0$  — собственная циклическая частотой колебательной системы, т. е. частота свободных незатухающих колебаний той же колебательной системы при  $\delta = 0$  (при отсутствии потерь энергии).

Решение уравнения (9.33) в случае малых затуханий ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ) рассмотрим в виде



$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi), \quad (9.34)$$

$$A = A_0 e^{-\delta t} \quad (9.35)$$

где

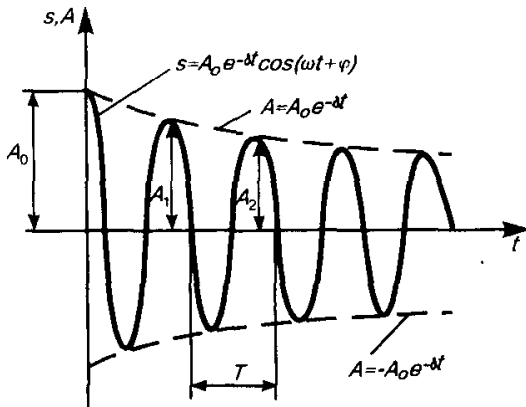


Рис. 9.9

- амплитуда затухающих колебаний,

$A_0$  - начальная амплитуда (амплитуда в момент времени равный нулю).

Зависимость (9.34) показана на рис. 9.9 сплошной линией, а зависимость (9.35) – штриховыми линиями. Промежуток времени  $\tau = 1/\delta$ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в  $e = 2.7$  раз, называется **временем релаксации**.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним неприменимо понятие периода или частоты. Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими

максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины (см. рис. 9.9). Тогда период затухающих колебаний равен

$$T = 2\pi / \omega = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}.$$

Если  $A(t)$  и  $A(t+T)$  — амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение  $\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$  называется

**декрементом затухания**, а его логарифм

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad (9.36)$$

- **логарифмическим декрементом затухания**, где  $N_e$  — число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в  $e$  раз. Логарифмический декремент затухания — постоянная для данной колебательной системы величина.

Для характеристики колебательной системы пользуются понятием **добротности**  $Q$ , которая при малых значениях логарифмического декремента равна

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad (9.37)$$

(так как затухание мало ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ), то  $T$  принято равным  $T_0$ ).

Из формулы (9.37) следует, что добротность пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за время релаксации.

Выводы, полученные для свободных затухающих колебаний линейных систем, применимы для колебаний различной физической природы — механических и электромагнитных.

### 9.6.1 Свободные затухающие колебания пружинного маятника

Для пружинного маятника массой  $m$ , совершающего малые колебания под действием упругой силы  $F = -kx$ , сила трения пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{TP} = -rv = r\dot{x},$$

где  $r$  — коэффициент сопротивления, знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости.

При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}, \quad (9.38)$$

Используя формулу  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  и принимая, что коэффициент затухания

$$\delta = r/(2m) \quad (9.39)$$

получим идентичное уравнению (9.33) дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Из выражений (9.33) и (9.34) вытекает, что колебания маятника подчиняются закону

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi),$$

где циклическая частота равна

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}.$$

Добротность пружинного маятника, согласно (9.37) равна  $Q = \frac{1}{r} \sqrt{km}$ .

## § 9.7 Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Резонанс

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью какого-либо периодически действующего фактора  $X(t)$ , изменяющего по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

Если рассматривать механические колебания, то роль  $X(t)$  играет внешняя вынуждающая сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (9.40)$$

С учетом (9.40) закон движения для пружинного маятника (9.38) запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Используя (9.17) и (9.39), приходим к уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta r\dot{x} + \omega_0^2 x = (F/m) \cos \omega t \quad (9.41)$$

Механические колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы называются **вынужденными механическими колебаниями**.

Уравнение (9.41) можно свести к линейному неоднородному дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = f_0 \cos \omega t, \quad (9.42)$$

применяя впоследствии его решение для вынужденных колебаний конкретной физической природы ( $f_0$  в случае механических колебаний равно  $F_0/m$ ).

Решение уравнения (9.42) равно сумме общего решения (9.34) однородного уравнения (9.33) и частного решения неоднородного уравнения.

Получим частное решение уравнения (9.42) с помощью векторной диаграммы. Предположим, что частное решение уравнения имеет вид

$$s = a \cos(\omega t - \varphi). \quad (9.43)$$

Тогда

$$s' = -\omega a \sin(\omega t - \varphi) = \omega a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) \quad (9.44)$$

$$x'' = -\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi) = \omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi) \tag{9.45}$$

Подстановка выражений (9.43) - (9.45) в уравнение (9.42) приводит к соотношению

$$\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi) + 2\delta\omega a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2) + \omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi) = f_0 \cos \omega t \tag{9.46}$$

Из (9.46) следует, что постоянные  $a$  и  $\varphi$  должны иметь такие значения, чтобы гармоническая функция  $f_0 \cos \omega t$  была равна сумме трех гармонических функций, стоящих в левой части уравнения. Если изобразить функцию  $\omega_0^2 a \cos(\omega t - \varphi)$  вектором длины  $\omega_0^2 a$  направленным вправо, то функция  $2\delta\omega a \cos(\omega t - \varphi + \pi/2)$  изобразится вектором длины (рис. 9.10), повернутым относительно вектора  $\omega_0^2 a$  против часовой стрелки на угол  $\pi/2$ ,

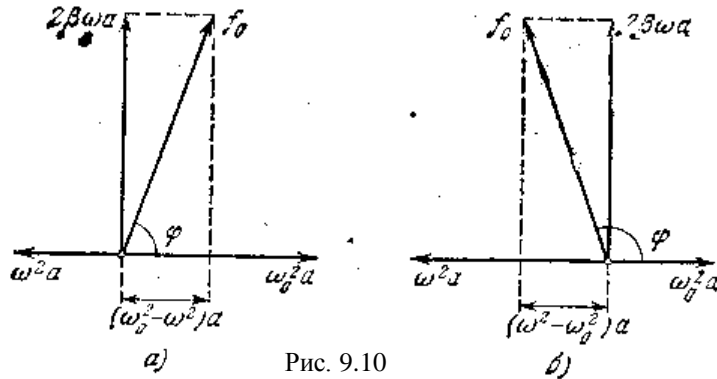


Рис. 9.10

а функция  $\omega^2 a \cos(\omega t - \varphi + \pi)$  — вектором длины  $\omega^2 a$ , повернутым относительно вектора  $\omega_0^2 a$  на угол  $\pi$ . Чтобы уравнение (9.46) было удовлетворено, сумма трех перечисленных векторов должна совпадать с вектором, изображающим функцию  $f_0 \cos \omega t$ . Из рис. 9.10, а видно, что такое совпадение возможно лишь при значении амплитуды  $a$ , которое определяется условием:

$$(\omega_0^2 - \omega^2)a^2 + 4\delta^2 \omega^2 a^2 = f_0^2$$

откуда

$$a = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \tag{9.47}$$

Рис. 9.10 а отвечает случаю  $\omega < \omega_0$ . Из рис. 9.10 б, отвечающего случаю  $\omega > \omega_0$  получается такое же значение  $a$ .

Рис. 9.10 позволяет получить также и значение  $\varphi$ , которое представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания от обусловившей его вынуждающей силы. Из рисунка следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{9.48}$$

Подставив в (9.43) значения  $a$  и  $\varphi$ , определяемые формулами (9.47) и (9.48), получим функцию

$$s = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos\left(\omega t - \operatorname{arctg} \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \tag{9.49}$$

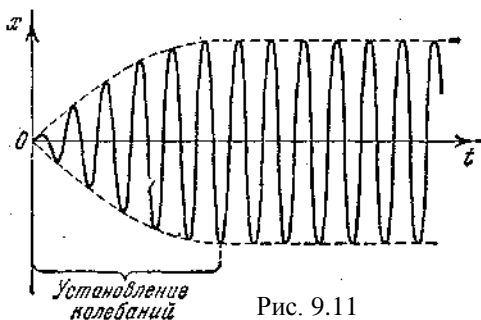


Рис. 9.11

Функция (9.49) в сумме с (9.34) дает общее решение уравнения (9.42), описывающее поведение системы при вынужденных колебаниях. Слагаемое (9.34) играет заметную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом, установлении колебаний (рис.9.11). С течением времени из-за экспоненциального множителя роль слагаемого (9.34) все больше уменьшается и по прошествии достаточного времени им можно пренебречь, сохраняя в решении лишь слагаемое (9.49).

Таким образом, функция (9.49) описывает установившиеся вынужденные колебания. Они представляют собой гармонические колебания с частотой, равной частоте вынуждающей силы. Амплитуда (9.47) вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы. Для данной колебательной системы (определённых  $\omega_0$  и  $\delta$ ) амплитуда зависит от частоты вынуждающей силы. Вынужденные колебания отстают по фазе от вынуждающей силы, причем величина отставания также зависит от частоты вынуждающей силы.

Рассмотрим зависимость амплитуды  $A$  вынужденных колебаний от частоты  $\omega$ . Из формулы (9.47) следует, что амплитуда  $A$  имеет максимум. Чтобы определить резонансную частоту  $\omega_{рез}$  (частоту, при которой амплитуда  $A$  достигает максимума) нужно найти максимум функции (9.47), или, что то же самое, минимум подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по  $\omega$  и приравняв его нулю, получим условие, определяющее  $\omega_{рез}$ :

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\delta^2\omega = 0.$$

Это равенство выполняется при  $\omega = 0, \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ , у которых только лишь положительное значение имеет физический смысл. Следовательно, резонансная частота

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}. \quad (9.50)$$

*Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы (частоты вынуждающего переменного напряжения) к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется **резонансом**.*

При  $\delta^2 \ll \omega_0^2$  значение  $\omega_{рез}$  практически совпадает с собственной частотой  $\omega_0$  колебательной системы. Подставляя (9.50) в формулу (9.47), получим

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}. \quad (9.51)$$

На рис. 9.12 приведены зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях  $\delta$ :

1- коэффициент  $\delta = 0$ ;

2,3,4 – реальные резонансные кривые при  $\delta_2 < \delta_3 < \delta_4$

Из (9.50) и (9.51) вытекает, что чем меньше  $\delta$ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. Если  $\omega \rightarrow 0$ , то все кривые достигают одного и того же, отличного от нуля, предельного значения  $x_{ст} = f_0 / \omega_0^2$ , которое называют **статическим отклонением**. Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то все кривые асимптотически стремятся к нулю. Приведенная совокупность кривых называется **резонансными кривыми**.

Из формулы (9.51) вытекает, что при малом затухании ( $\delta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансная амплитуда смещения

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2},$$

где  $Q$  - добротность колебательной системы,  $f_0 / \omega_0^2$  - рассмотренное выше статическое отклонение. Отсюда следует, что добротность  $Q$ , характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше  $Q$ , тем больше  $A_{рез}$ .

Из выражения  $tg\varphi = 2\delta\omega / (\omega_0^2 - \omega^2)$  следует, что если затухание в системе отсутствует ( $\delta = 0$ ), то только в этом случае колебания и вынуждающая сила имеют одинаковые фазы; во всех других случаях  $\varphi \neq 0$ . Зависимость  $\varphi$  от  $\omega$  при разных коэффициентах  $\delta$  графически представлена на рис. 9.13, из которого следует, что при изменении  $\omega$  изменяется и сдвиг фаз  $\varphi$ . Из формулы (9.48) вытекает, что при  $\omega = 0$   $\varphi = 0$ , а при  $\omega = \omega_0$  независимо от значения коэффициента затухания  $\delta\varphi = \pi/2$ , то есть сила опережает по фазе колебания на  $\pi/2$ .

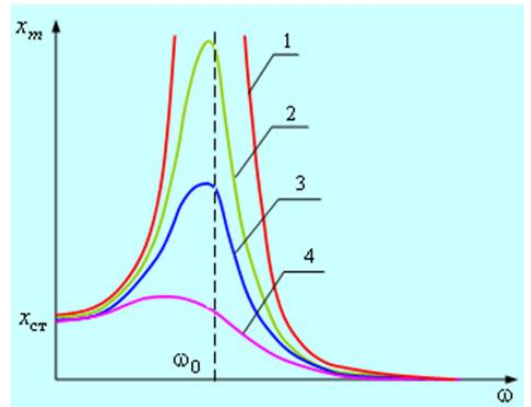


Рис. 9.12

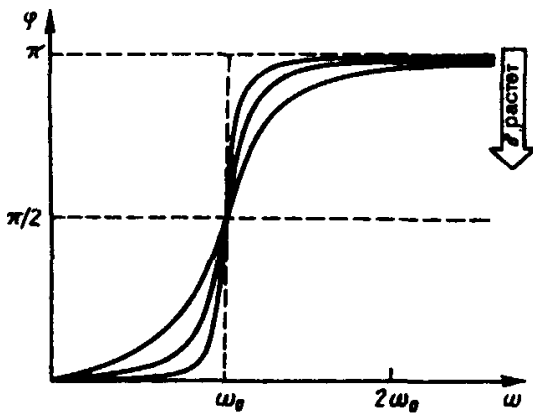


Рис. 9.13

При дальнейшем увеличении  $\omega$  сдвиг фаз возрастает и при  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\varphi \rightarrow \pi$ , т.е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы (переменного напряжения). Семейство кривых, изображенных на рис. 9.13, называется **фазовыми резонансными кривыми**.

Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными. Например, при конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота колебаний их не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения. С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника используют явление резонанса.

## § 9.8 Упругие волны

Колебания, возбужденные в какой-либо точке среды (твердой, жидкой или газообразной), распространяются в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Чем дальше расположена частица среды от источника колебаний, тем позднее она начнет колебаться. Иначе говоря, фазы колебаний частиц среды и источника тем больше отличаются друг от друга, чем больше это расстояние. При изучении распространения колебаний не учитывается дискретное (молекулярное) строение среды и среда рассматривается как сплошная, то есть непрерывно распределенная в пространстве и обладающая упругими свойствами.

**Волной** называется процесс распространения колебаний в пространстве.

При распространении волны частицы среды не движутся вместе с волной, а колеблются около своих положений равновесия. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества. Различают упругие и электромагнитные волны.

**Упругими** (или **механическими**) **волнами** называются процесс распространения механических колебаний в сплошной упругой среде.

**Электромагнитными волнами** называется процесс распространения в пространстве переменного электромагнитного поля.

Волны бывают **продольные** и **поперечные**.

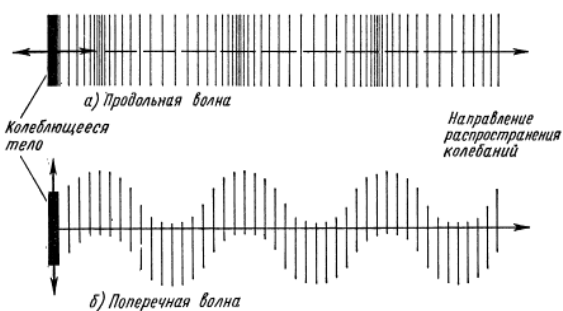


Рис. 9.14

**Продольной** называется волна, при распространении которой частицы среды колеблются в направлении распространения волны.

**Поперечной** называется волна, при распространении которой частицы среды колеблются в направлении перпендикулярном распространению волны.

Продольные волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации сжатия и растяжения, то есть твердых, жидких и газообразных телах. Поперечные волны

могут возбуждаться в среде, в которой возникают упругие силы **при деформации сдвига**, то есть в твердых телах; в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах — как продольные, так и поперечные.

**Монохроматической** называется волна какой-либо определённой частоты или длины волны.

Упругая волна называется **гармонической**, если соответствующие ей колебания частиц среды являются гармоническими. На рис. 9.15 представлена гармоническая поперечная волна, распространяющаяся со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$ , то есть приведена зависимость между смещением  $\xi$  частиц среды, участвующих в волновом процессе, и расстоянием  $x$  этих частиц (например, частицы  $B$ ) от источника колебаний  $O$  для какого-то фиксированного момента времени  $t$ .

Приведенный график функции  $\xi(x, t)$  похож на график гармонического колебания, однако, они различны по существу. График волны дает зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени, а график колебаний - зависимость смещения данной частицы от времени.

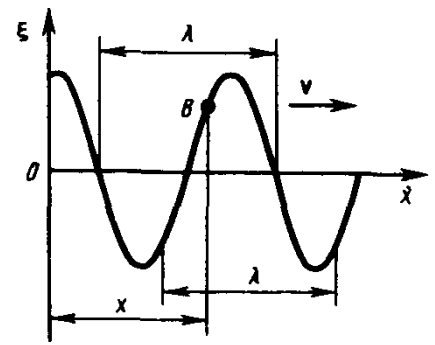


Рис. 9.15

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны**  $\lambda$  (рис. 9.15). Длина волны равна тому расстоянию, на которое распространяется определенная фаза колебания за период, то есть

$$\lambda = vT$$

или, учитывая, что  $T = 1/\nu$ , где  $\nu$  - частота колебаний,

$$v = \lambda \nu.$$

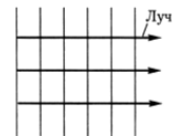
Если рассмотреть волновой процесс подробнее, то ясно, что колеблются не только частицы, расположенные вдоль оси  $x$ , а колеблется совокупность частиц, расположенных в некотором объеме, т. е. волна, распространяясь от источника колебаний, охватывает все новые и новые области пространства.

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени  $t$ , называется **волновым фронтом**.

Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**.

Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени — один. Волновой фронт также является волновой поверхностью. Волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно волна называется **плоской** или **сферической**.

**Плоской** называется волна, фазовые поверхности которой представляют собой совокупность параллельных друг другу плоскостей.



**Сферической** называется волна, фазовые поверхности которой представляют собой совокупность концентрических сфер.



**Бегущими** называются волны, которые переносят в пространстве энергию.

Перенос энергии волнами количественно характеризуется **вектором плотности потока энергии**. Этот вектор для упругих волн называется **вектором Умова** (по имени русского ученого Н. А. Умова (1846—1915), решившего задачу о распространении энергии в среде).

Направление вектора Умова совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Для вывода уравнения бегущей волны—зависимости смещения колеблющейся частицы от координат и времени - рассмотрим плоскую волну, предполагая, что колебания носят гармонический характер, а ось  $x$  совпадает с направлением распространения волны. В данном случае волновые поверхности перпендикулярны оси  $x$ , а так как все точки волновой

поверхности колеблются одинаково, то смещение  $\xi$  будет зависеть только от  $x$  и  $t$ , т. е.  $\xi = \xi(x, t)$ .

На рис. 9.16 рассмотрим некоторую частицу  $B$  среды, находящуюся от источника колебаний  $O$  на расстоянии  $x$ .

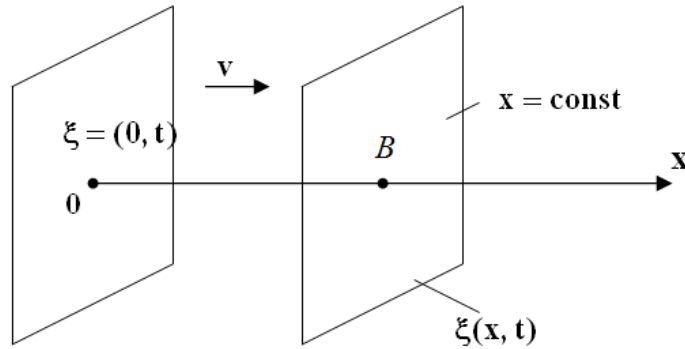


Рис. 9.16

Если колебания точек, лежащих в плоскости  $x = 0$ , описываются функцией  $\xi(0, t) = A \cos \omega t$ , то частица  $B$  среды колеблется по тому же закону, но её колебания будут отставать по времени от колебаний источника на  $\tau$ , так как для прохождения волной расстояния  $x$  требуется время  $\tau = x/v$ , где  $v$  — скорость распространения волны. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости  $x$ , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t - x/v), \quad (9.51)$$

откуда следует, что  $\xi(x, t)$  является не только периодической функцией времени, но и периодической функцией координаты  $x$ . Уравнение (9.51) есть **уравнение бегущей волны**. Если плоская волна распространяется в противоположном направлении, то

$$\xi(x, t) = A \cos \omega(t + x/v).$$

В общем случае уравнение плоской волны, распространяющейся вдоль положительного направления оси  $x$  в среде, не поглощающей энергию, имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \left[ \omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right], \quad (9.52)$$

где  $A = \text{const}$  — амплитуда волны,  $\omega$  — циклическая частота,  $\varphi_0$  — начальная фаза волны, определяемая в общем случае выбором начал отсчета  $x$  и  $t$ ,  $[\omega(t - \frac{x}{v}) + \varphi_0]$  — фаза плоской волны.

Для характеристики волн используется волновое число

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v} \quad (9.53)$$

Учитывая (9.53), уравнению (9.52) можно придать вид

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0). \quad (9.54)$$

Уравнение волны, распространяющейся вдоль отрицательного направления оси  $x$ , отличается от (9.54) только знаком члена  $kx$ .

Основываясь на формуле Эйлера, уравнение плоской волны можно записать в виде

$$\xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)},$$

где физический смысл имеет лишь действительная часть. Предположим, что при волновом процессе фаза постоянна, т. е.

$$\omega \left( t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 = \text{const}. \quad (9.55)$$

Продифференцировав выражение (9.55) и сократив на  $\omega$ , получим

$$dt - \frac{1}{v} dx = 0,$$

откуда

$$\frac{dx}{dt} = v. \quad (9.56)$$

Следовательно, скорость  $v$  распространения волны в уравнении (9.56) есть не что иное, как скорость перемещения фазы волны, и её называют **фазовой скоростью**.

Повторяя ход рассуждений для плоской волны, можно доказать, что уравнения сферической волны — волны, волновые поверхности которой имеют вид концентрических сфер, имеет такой вид:

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0), \quad (9.57)$$

где  $r$  — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

В случае сферической волны даже в среде, не поглощающей энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону  $1/r$ . Уравнение (9.57) справедливо лишь для  $r$ , значительно превышающих размеры источника (тогда источник колебаний можно считать *точечным*).

Из выражения (9.53) вытекает, что фазовая скорость

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (9.58)$$

Если фазовая скорость волн в среде зависит от их частоты, то это явление называют **дисперсией волн**, а среда, в которой наблюдается дисперсия волн, называется **диспергирующей средой**.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается **волновым уравнением** - дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (9.59)$$

где  $v$  — фазовая скорость волны,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad \text{— оператор Лапласа.}$$

Решением уравнения (9.59) является уравнение любой волны. Соответствующей подстановкой можно убедиться, что уравнению (9.59) удовлетворяют, в частности, плоская волна (см. (9.52)) и сферическая волна (см. (9.57)). Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $x$ , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (9.60)$$

Если среда, в которой распространяется одновременно несколько волн, линейна, то есть её свойства не изменяются под действием возмущений, создаваемых волной, то к ним применим **принцип суперпозиции** (или наложения) волн: *при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов*.

Исходя из принципа суперпозиции и разложения в ряд Фурье любая волна может быть представлена в виде суммы гармонических волн, то есть в виде **волнового пакета**, или группы волн.

**Волновым пакетом** называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте, занимающая в каждый момент времени ограниченную область пространства.

«Сконструируем» простейший волновой пакет из двух распространяющихся вдоль положительного направления оси  $x$  гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем  $d\omega \ll \omega$  и  $dk \ll k$ . Тогда



$$\begin{aligned}\xi &= A_0 \cos(\omega t - kx) + \\ &+ A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = \\ &= 2A_0 \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \cos(\omega t - kx).\end{aligned}$$

Эта волна отличается от гармонической тем, что её амплитуда

$$A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{td\omega - xdk}{2}\right) \right|$$

есть медленно изменяющаяся функция координаты  $x$  и времени  $t$ .

За скорость распространения этой негармонической волны (волнового пакета) принимают скорость перемещения максимума амплитуды волны, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета. При условии, что  $td\omega - xdk = const$ , получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk} = u \quad (9.61)$$

Скорость  $u$  есть **групповая скорость**. Её можно определить как скорость движения группы волн, образующих в каждый момент времени локализованный в пространстве волновой пакет. Выражение (9.61) получено для волнового пакета из двух составляющих, можно доказать, что оно справедливо в самом общем случае.

Рассмотрим связь между групповой  $u = \frac{d\omega}{dk}$  (см. (9.61)) и фазовой  $v = \frac{\omega}{k}$  (см. (9.58))

скоростями. Учитывая, что  $\lambda = \frac{2\pi}{k}$  (см. (9.53)), получим

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(vk)}{dk} = v + k \frac{dv}{dk} = v + k \left( \frac{dv}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} \right) = v + k \left( -\frac{\lambda}{k} \right) \frac{dv}{d\lambda}$$

или

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (9.62)$$

Из формулы (9.62) вытекает, что  $u$  может быть как меньше, так и больше  $v$  в зависимости от знака  $\frac{dv}{d\lambda}$ . В недиспергирующей среде  $\frac{dv}{d\lambda} = 0$  и групповая скорость совпадает с фазовой.

Понятие групповой скорости очень важно, так как именно она фигурирует при измерении дальности в радиолокации, в системах управления космическими объектами и так далее.

Согласованное протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов связывают с понятием **когерентности**.

**Когерентными** называются волны, разность фаз которых остается постоянной с течением времени.

Очевидно, что когерентными могут быть лишь волны, имеющие одинаковую частоту. При наложении в пространстве двух (или нескольких) когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется **интерференцией волн**.

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн, возбуждаемых точечными источниками  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 9.17), колеблющимися с одинаковыми амплитудой  $A_0$  и частотой  $\omega$  и постоянной разностью фаз. Согласно (9.57),

$$\xi = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1),$$

$$\xi_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2),$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — расстояния от источников волн до рассматриваемой точки  $B$ ,  $k$  — волновое число,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — начальные фазы обеих накладывающихся сферических волн. Амплитуда результирующей волны в точке  $B$  равна

$$A^2 = A_0^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_1 r_2} \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2)] \right\}.$$

Так как для когерентных источников разность начальных фаз  $(\varphi_1 - \varphi_2) = const$ , то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины  $\Delta = r_1 - r_2$ , называемой **разностью хода волн**.

В точках, где

$$\begin{aligned} k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) &= \pm 2m\pi \\ (m = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (9.63)$$

наблюдается **интерференционный максимум**: амплитуда результирующего колебания

$$A = A_0 / r_1 + A_0 / r_2.$$

В точках, где

$$\begin{aligned} k(r_1 - r_2) - (\varphi_1 - \varphi_2) &= \pm(2m + 1)\pi \\ (m = 0, 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (9.64)$$

наблюдается **интерференционный минимум**: амплитуда результирующего колебания

$$A = |A_0 / r_1 - A_0 / r_2|,$$

где числа  $m=0, 1, 2, \dots$ , называются соответственно **порядком интерференционного максимума или минимума**.

Условия (9.63) и (9.64) сводятся к тому, что

$$r_1 - r_2 = const. \quad (9.65)$$

Выражение (9.65) представляет собой уравнение гиперболы с фокусами в точках  $S_1$  и  $S_2$ . Следовательно, геометрическое место точек, в которых наблюдается усиление или ослабление результирующего колебания, представляет собой семейство гипербол (рис. 9.17), отвечающих условию  $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ . Между двумя интерференционными максимумами (на рис. 9.17 сплошные линии) находятся интерференционные минимумы (на рис. 9.17 штриховые линии).

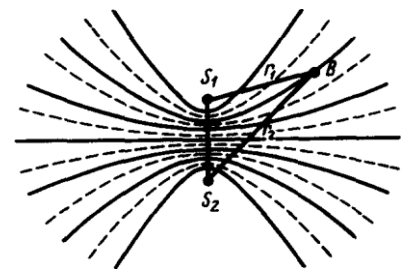


Рис. 9.17

### 9.8.1 Звук

**Звук** называются механические волны малой интенсивности частотой от 16 Гц до 20 000 Гц, воспринимаемые органами слуха человека.

Звук по своей физической сущности представляет собой волновой процесс, распространяющийся в среде в виде колебаний молекул вещества и переносящий в различных направлениях энергию этих колебаний.

#### Основные субъективные характеристики звука

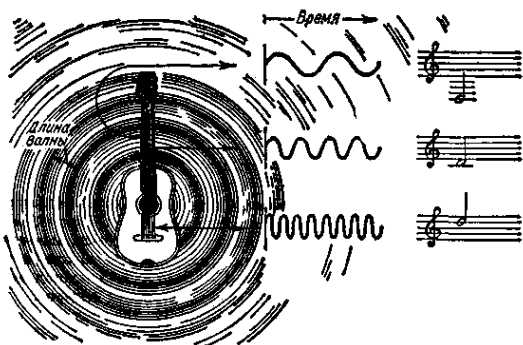


Рис. 9.18

**Громкость** - это субъективная характеристика звука, зависящая при одной и той же частоте звука от его амплитуды (чем больше амплитуда волны, тем громче звук).

**Высота** - это субъективная характеристика звука, определяемая частотой волны (чем больше частота, тем выше звук).

**Тембр** - это субъективная характеристика звука, определяемая акустическим спектром волны и позволяющая на слух различать звуки одной и той же частоты, но создаваемые разными источниками (например, отличить скрипку от гитары, различать

голоса людей, слушать музыку и т. д.)

**Музыкальным тоном** (или чистым звуком) называется звуковая гармоническая волна какой-либо определённой частоты (создаётся камертоном)

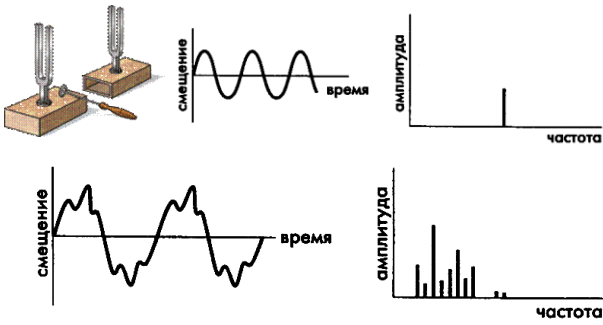


Рис. 9.19

Форма реальной звуковой волны отличается от гармонической. Её можно представить в виде суммы нескольких гармонических звуковых волн с разной частотой и амплитудой. В этом случае говорят об акустическом спектре волны.

Разные источники звука имеют свой акустический спектр, который и определяет тембр данной звуковой волны.

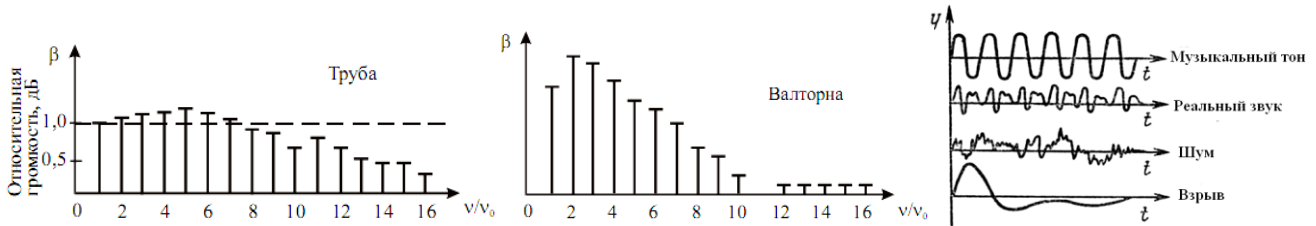


Рис. 9.20

### § 9.9 Электромагнитные волны

**Электромагнитной волной** называется распространяющееся в пространстве переменное электромагнитное поле.

Из анализа уравнений Максвелла следует, что в электромагнитной волне вектора напряжённости электрического поля  $\vec{E}$  и магнитного поля  $\vec{H}$  изменяются по следующим законам:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \end{cases}$$

Уравнения этой системы представляют собой, так называемые, **волновые уравнения**, решениями которых являются уравнения вида:

$$\begin{cases} E = E_m \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi) \\ H = H_m \cos(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi) \end{cases}$$

Это уравнения плоской незатухающей гармонической волны.

Дальнейший анализ уравнений Максвелла приводит к выводу, что в электромагнитной волне колебания векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (или  $\vec{B}$ ) должны происходить синфазно, во взаимно перпендикулярных плоскостях и одновременно быть перпендикулярны вектору скорости распространения электромагнитной волны, причём должно выполняться условие

$$\varepsilon \varepsilon_0 E_m^2 = \mu \mu_0 H_m^2$$

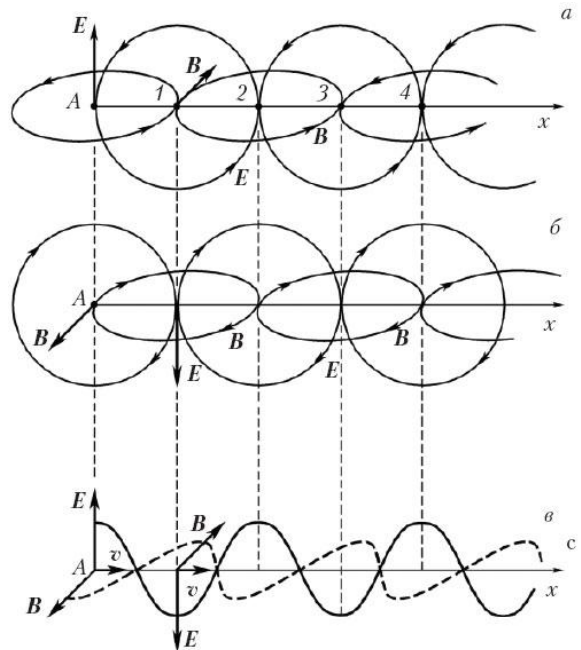


Рис. 9.21

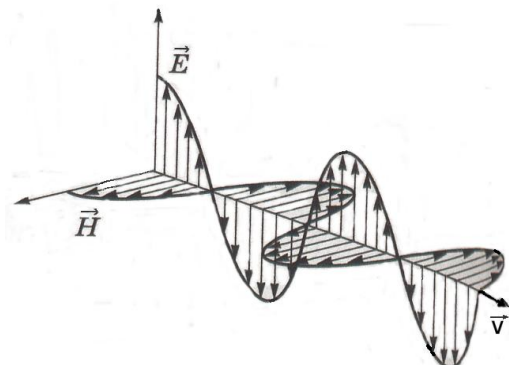


Рис. 9.22

На рис. 9.21(а и б) изображены силовые линии электрического и магнитного полей волны при её распространении в пространстве, а на рис. 9.21 (в) и рис. 9.22 дано распределение проекций векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  (или  $\vec{B}$ ) вдоль направления распространения электромагнитной волны.

Электромагнитная волна в направлении своего распространения переносит энергию. Она содержится в электрическом и магнитном полях и пропорционально квадратам напряжённостей  $E$  и  $H$  этих полей.

Напомним, что объёмная плотность энергии электрического поля  $w_e = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}$  и магнитного поля  $w_m = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} = \frac{\mu\mu_0 H^2}{2}$ .

Следовательно, плотность энергии электромагнитного поля равна

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \varepsilon\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2. \quad (9.64)$$

Можно доказать, что для любой точки электромагнитной волны можно получить, что  $w_e = w_m$ , то есть

$$\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \mu\mu_0 H^2. \quad (9.65)$$

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}} = v. \quad (9.66)$$

где  $v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$  - скорость распространения электромагнитной волны в среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu$ .

В вакууме  $\varepsilon = 1; \mu = 1$  и отношение (9.66) приобретает вид

$$\frac{E}{B} = c. \quad (9.67)$$

Объёмная плотность энергии волны в вакууме из (9.64)

$$w = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \mu_0 H^2. \quad (9.68)$$

Для сравнения волн между собой ввели понятие **интенсивности волны**, равной энергии, переносимой за 1с через площадку в  $1\text{ м}^2$ , перпендикулярную к направлению распространения. Она равна энергии поля, заключённой в параллелепипеде с площадью основания в  $1\text{ м}^2$  и длиной, равной скорости света, т.е.

$$I = cw = c\varepsilon_0 E^2. \quad (9.69)$$

С учётом (9.67) и (9.68) запишем

$$I = EH. \quad (9.70)$$

Напряжённости  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  есть векторные величины, их умножение по модулю в соотношении (9.70) означает результат векторного произведения  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  при условии, что они взаимно перпендикулярны. Таким образом, может быть введён вектор, характеризующий не только количественную меру переноса энергии, но и направление её переноса. И этот вектор называется вектором Пойнтинга, его обозначают буквой  $\vec{\Pi}$

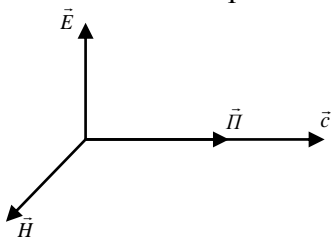


Рис. 9.23

(9.71)

Модуль вектора Пойнтинга равен согласно приведённым соотношениям интенсивности волны  $|\vec{\Pi}| = I$ . Его направление определяется правилом правого винта (рис. 9.23) и совпадает с направлением переноса энергии. В свободном пространстве  $\vec{\Pi}$

$$\vec{\Pi} = [\vec{E} \times \vec{H}].$$

совпадает с направлением вектора скорости света  $\vec{c}$ . Электромагнитная волна, таким образом, есть поперечная волна, поскольку колебания напряжённостей полей  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  происходят в поперечной к направлению распространения плоскости. Поэтому электромагнитные волны обладают свойством поляризации. Выражается оно в том, что существуют волны с разными ориентациями плоскости, в которой лежат векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{c}$ . Эта плоскость называется **плоскостью поляризации**. Если эта плоскость имеет фиксированную ориентацию, то такая волна называется **линейно (плоско) – поляризованной**.

В процессе распространения волны вектор  $\vec{E}$  может совершать вращение вокруг оси, совпадающей с вектором скорости  $\vec{c}$ , и тогда волна имеет **круговую поляризацию**. То или иное состояние поляризации электромагнитных волн определяют условия регистрации (приёма) электромагнитных излучений и характер их взаимодействия с веществом. Таким образом, теория Максвелла сыграла выдающуюся роль в развитии физики. Эта теория не только объяснила большую совокупность опытных фактов, но предсказала вплоть до количественных оценок существование неизвестных ранее явлений.

### 9.9.1 Свет и его природа

**Видимым светом** называются электромагнитные волны с длиной волны от 380 нм до 760 нм, которые воспринимаются органами зрения человека.

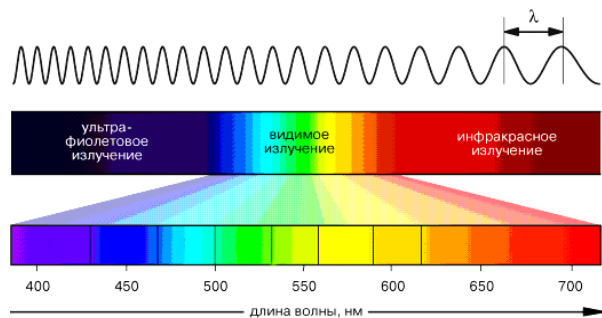


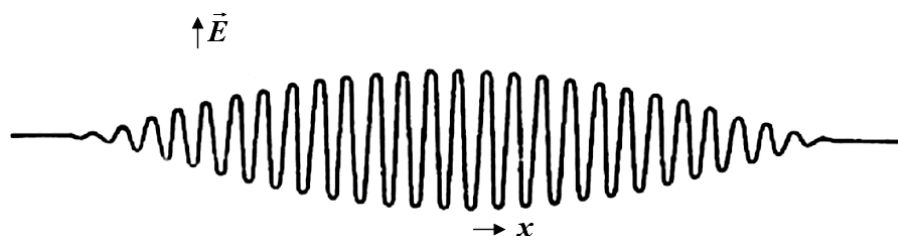
Рис. 9.24

**Оптическим диапазоном** называются электромагнитные волны с длиной волны  $\lambda = (10^{-4} \div 10^{-8}) \text{ м}$

В него входят **ультрафиолетовое излучение (УФ)**, **видимый свет** и **инфракрасное излучение (ИК)**.

### Современные представления о свете

1. Свет представляет собой поток особых частиц (**квантов** или **фотонов**), которые по своей природе являются электромагнитными волнами. Кванты света излучаются атомами вещества при переходе электронов с орбиты с большей энергией на орбиту с меньшей энергией, в результате чего излишек энергии за время перехода ( $\approx 10^{-8} \text{ с}$ ) излучается в виде кванта света, который представляет собой ограниченный в пространстве, так называемый, **цуг** электромагнитной волны длиной  $\approx 3 \text{ м}$ .



Схематическое представление кванта света. Рисунок показывает распределение напряжённости электрического поля  $E$  от координаты  $x$  в некоторый момент времени.

Рис. 9.25

2. Каждый фотон несёт с собой энергию  $E_{\phi} = h\nu$ . Фотон существует только в движении и всегда имеет одну и ту же скорость  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Движущийся фотон обладает массой

$m_{\phi} = \frac{h\nu}{c^2}$  и импульсом  $p_{\phi} = m_{\phi} c$ . Так как покоящихся фотонов не существует, то говорят, что масса покоя фотона равна нулю.

3. Корпускулярные свойства света проявляются именно в том, что свет всегда излучается, распространяется в пространстве и поглощается веществом только порциями (то есть квантами). Причём поглощается фотон всегда целиком, а не частями. При поглощении фотон исчезает, передав свой импульс и энергию веществу.

### Вопросы для самопроверки

1. Колебания, виды колебаний. Затухающие и незатухающие колебания. Периодические колебания. Свободные и вынужденные колебания.
2. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний и его решение. График гармонических колебаний. Понятие об амплитуде, частоте, фазе, периоде.
3. Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний и его решение. График затухающих колебаний. Понятие о коэффициенте затухания, декременте и логарифмическом декременте затухания, времени релаксации и добротности колебательной системы.
4. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. Понятие о резонансе.
5. Понятие о маятнике. Математический, физический, оборотный и пружинный маятники. Формулы для периодов колебаний этих маятников. Приведенная длина физического маятника.
6. Сложение гармонических колебаний одного направления. Метод векторных диаграмм. Биения.
7. Сложение двух взаимно перпендикулярных гармонических колебания. Фигуры Лиссажу.
8. Волна. Механическая волна. Поперечные и продольные волны. Фронт волны, волновая поверхность, понятие о бегущей и стоячей волне. Плоские и сферические волны.
9. Длина волны, период и частота волны.
10. Дифференциальное уравнение волны (волновое уравнение). Уравнения плоской бегущей гармонической волны.
11. Понятие о групповой и фазовой скорости волн. Дисперсия волн.
12. Интерференция волн.

### § 9.10 Примеры решения задач

**Пример 9.1** Амплитуда гармонических колебаний материальной точки  $A=2$  см, полная энергия колебаний  $W = 0,3$  мкДж. При каком смещении  $x$  от положения равновесия на колеблющуюся точку действует сила  $F = 22,5$  мкН?

**Решение:**

Полная энергия тела, совершающего гармоническое колебательное движение,

$$W = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2$$

а сила, действующая на тело,

$$F = \frac{4\pi^2 M}{T^2} x$$

Разделив эти уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{W}{F} = \frac{A^2}{2x}.$$

Отсюда смещение точки от положения равновесия равно

$$x = \frac{A^2 F}{2W} = 1,5 \text{ см}.$$

**Ответ:**  $x = 1,5 \text{ см}.$

**Пример 9.2** К пружине подвешен груз массой  $m = 10$  кг. Зная, что пружина под влиянием силы  $F = 9,8$  Н растягивается на  $1,5$  см, найти период  $T$  вертикальных колебаний груза.

**Решение:**

По закону Гука сила упругости  $F = -kx$  (знак «минус» говорит о том, что  $F$  - возвращающая сила), откуда  $k = \frac{|F|}{x}$  - коэффициент жесткости пружины.

Уравнение второго закона Ньютона для груза имеет вид  $mx'' = -kx$ . Введя обозначение  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , преобразуем уравнение следующим образом:

$$x'' + \omega_0^2 x = 0.$$

Величина  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  - циклическая частота колебаний, откуда период колебаний вертикального пружинного маятника равна:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Окончательно получим:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{F}} = 0,78$  с.

**Ответ:**  $T = 0,78$  с.

**Пример 9.3** Медный шарик, подвешенный к пружине, совершает вертикальные колебания. Как изменится период колебаний, если к пружине подвесить вместо медного шарика алюминиевый такого же радиуса?

**Решение:**

Периоды колебаний медного и алюминиевого шариков соответственно равны  $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m_1}{k}}$

и  $T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{m_2}{k}}$ , а их отношение  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$ . Так как по условию задачи радиусы шариков равны,

то равны и их объемы, а значит,  $\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ , где  $\rho_1 = 8,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> и  $\rho_2 = 2,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup> -

плотности меди и алюминия, тогда  $\frac{T_1}{T_2} = 1,82$ .

**Ответ:**  $\frac{T_1}{T_2} = 1,82$ .

**Пример 9.4** Груз массой  $400$  г, подвешенный к пружине жесткостью  $40$  Н/м, совершает гармонические незатухающие колебания. В начальный момент времени груз находится на расстоянии  $2$  см от положения равновесия и обладает энергией  $0,5$  Дж. Напишите уравнение гармонических колебаний груза и закон изменения возвращающей силы от времени. Найдите наибольшее значение возвращающей силы и её значение через  $0,2$  периода.

**Решение:**

Напишем уравнение гармонических колебаний груза в форме

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0).$$

Но в условии задачи ничего не сказано ни об амплитуде  $A$ , ни о круговой частоте  $\omega$ , ни о начальной фазе  $\varphi_0$ .

Поэтому воспользуемся соотношениями, связывающими эти величины с величинами, заданными в условии задачи. Так как период колебаний  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ , а круговая частота  $\omega = 2\pi/T$ , то  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

В условии задачи оговорено, что груз совершает незатухающие колебания. Значит, в соответствии с законом сохранения энергии заданное значение энергии груза в начальный момент времени не зависит от его положения и равно  $E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$ , откуда  $A = \sqrt{2E/k}$ . Чтобы найти начальную фазу  $\varphi_0$ , вспомним, что, по условию задачи, при  $t=0$   $x = x_0$ . Тогда уравнение примет вид  $x_0 = \sqrt{2E/k} \cos \varphi_0$ . Откуда

$$\varphi_0 = \arccos\left(x_0\sqrt{\frac{k}{2E}}\right)$$

Подставляя значения, получим

$$x = 0,2 \cos(10t + 1,4)$$

Чтобы написать закон изменения возвращающей силы от времени, воспользуемся условием совершения гармонических колебаний, в соответствии с которым

$$F = -kx$$

Получим  $|F_{\max}| = -8 \cos(10t + 1,4) = 8H$ .

Чтобы найти модуль силы  $F_1$  следует положить  $t = t_1$  и с учетом выражения для периода  $T$  решить его относительно  $F_1$ . Тогда  $|F_1| = 7,1H$ .

**Ответ:**  $|F_{\max}| = 8H$ ,  $|F_1| = 7,1H$

**Пример 9.5** Как изменится период вертикальных колебаний груза, висящего на двух пружинах, если от последовательного соединения пружин перейти к их параллельному соединению?

**Решение:**

Сила упругости пружины по закону Гука равна  $F = -kx$ . Если к пружине подвесить груз массой  $m$ , то в положении равновесия  $mg = kx$ , откуда удлинение пружины  $x = \frac{mg}{k}$ . Если две пружины соединить последовательно, то их удлинения будут равны, а общее удлинение составит  $x_2 = 2x = \frac{2mg}{k}$  - (1). С другой стороны,  $x_2 = \frac{mg}{k_1}$  (2), откуда, приравнявая правые части уравнений (1) и (2), получаем  $\frac{2mg}{k} = \frac{mg}{k_1}$  или  $k_1 = \frac{k}{2}$ . При параллельном соединении пружин общая жесткость системы  $k_2 = 2k$ . Таким образом, периоды колебаний при последовательном и параллельном соединении пружин соответственно равны

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} \text{ и } T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_2}},$$

а их отношение

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}} = \sqrt{4} = 2.$$

**Ответ:**  $\frac{T_1}{T_2} = 2$ .



**Пример 9.6** Ареометр массой 200г плавает в жидкости. Если его погрузить немного в жидкость, а затем отпустить, то он начнет совершать колебания с периодом 3.4 с. Считая колебания ареометра гармоническими и незатухающими, найти плотность жидкости, в которой он плавает. Радиус вертикальной цилиндрической трубки ареометра равен 5 мм.

**Решение:**

По условию задачи ареометр совершает гармонические колебания, а это возможно при условии, что возвращающая сила в процессе колебания изменяется пропорционально смещению  $x$  и направлена к положению равновесия ареометра:

$$F = -kx, \quad (1)$$

где  $k$  - постоянный для данной системы коэффициент, который нам предстоит в процессе решения задачи выразить через величины, характеризующие колебательную систему.

Возвращающей силой, под действием которой ареометр совершает колебания, является результирующая всех сил, действующих на ареометр. Силами сопротивлений можно пренебречь, поэтому на ареометр действуют только две силы: сила тяжести  $mg$ , направленная вертикально вниз, и архимедова сила  $F_A$ , направленная вертикально вверх. Сила тяжести  $mg$  при движении ареометра не меняется, а вот архимедова сила зависит от объема его погруженной части. Значит, величина и направление возвращающей силы  $mg + F_A$ , будут меняться в зависимости от глубины погружения ареометра. Пока ареометр плавает и колебаний не наблюдается,  $mg + F_A = 0$ . Выбрав вертикальную ось координат, проецируя на нее это уравнение, получим

$$mg = \rho Vg, \quad (2)$$

где  $V$  - объем погруженной части ареометра,  $\rho$  - искомая плотность жидкости.

Небольшое погружение ареометра в жидкость приведет к увеличению объема погруженной части, а, следовательно, и к увеличению архимедовой силы. Тогда равенство (2) нарушится и возвращающая сила будет направлена вертикально вверх. Найдем её.

Если ареометр погрузить в жидкость на некоторую глубину  $x$ , то объём погруженной части станет равным  $V + Sx$ , где  $S = \pi r^2$  - площадь сечения трубки ареометра, и возвращающая сила примет значение  $F = mg - \rho g(V + Sx)$ , или с учётом равенства (2) и выражения для  $S$  имеем

$$F = -\rho g \pi r^2 x \quad (3)$$

Сравнивая выражения (1) и (3), находим

$$k = \rho g \pi r^2 \quad (4)$$

Известно, что если колебания совершаются под действием силы, изменяющейся по закону (1) или (3), то независимо от природы этой силы период колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{m/k} \quad (5)$$

Решая совместно уравнения (4) и (5) относительно искомой плотности, находим

$$\rho = \frac{4\pi m}{T^2 r^2 g} = 0,9 \cdot 10^3 \text{ кг} / \text{м}^3$$

**Ответ:**  $\rho = 0,9 \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ .

**Пример 9.7** К пружине подвешена чашка весов с гирями. При этом период вертикальных колебаний 0,5 с. После того как на чашку весов положили еще добавочные гири, период вертикальных колебаний стал равным 0,6 с. На сколько удлинилась пружина от прибавления этого добавочного груза?

**Решение:**

Имеем

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1);$$

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{(m + \Delta m)}{k}} \quad (2).$$

Возведя (1) и (2) в квадрат, а затем, вычтя (1) из (2), получим

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{k}.$$

Жесткость пружины

$$k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{\Delta mg}{\Delta l}.$$

Тогда

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta l}{g},$$

откуда

$$\Delta l = \frac{g}{4\pi^2} (T_2^2 - T_1^2) = 0.027 \text{ м}.$$

**Ответ:**  $\Delta l = 0.027 \text{ м}$

**Пример 9.8** Найти амплитуду  $A$  и начальную фазу гармонического колебания, полученного от сложения одинаково направленных колебаний, данных уравнениями  $x_1 = 0,02 \sin(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ м}$  и  $x_2 = 0,03 \sin(5\pi t + \frac{\pi}{4}) \text{ м}$ .

**Решение:**

Из уравнений колебаний  $x_1 = 0,02 \sin(5\pi t + \frac{\pi}{2}) \text{ м}$  и  $x_2 = 0,03 \sin(5\pi t + \frac{\pi}{4}) \text{ м}$  находим амплитуды колебаний  $A_1 = 0,02 \text{ м}$  и  $A_2 = 0,03 \text{ м}$  и их начальные фазы  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  и  $\varphi_2 = \frac{\pi}{4}$ . При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0,045 \text{ м}.$$

Начальная фаза колебания определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} = 1,94.$$

Тогда  $\varphi = \arctg 1,94 = 62,75^\circ$ .

**Ответ:**  $\varphi = 62,75^\circ$

**Пример 9.9** Уравнения двух гармонических колебаний имеют вид  $x_1 = 3 \sin 4\pi t$  см и  $x_2 = 6 \sin 10\pi t$  см. Постройте график этих колебаний. Сложив графически эти колебания, постройте график результирующего колебания. Начертите спектр результирующего колебания.

**Решение:**

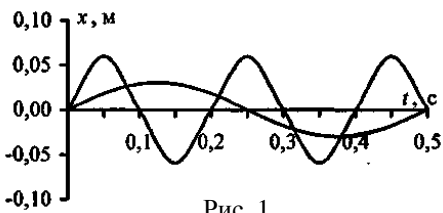


Рис. 1

Составим таблицу значений  $x = \varphi(t)$  для данных колебаний и построим их графики (рис.1). Затем, сложив значения  $x$ , соответствующие одним и тем же значениям  $t$ , получим график результирующего колебания (рис.2).

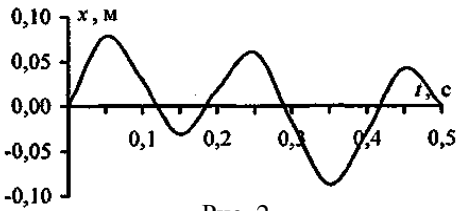


Рис. 2

Из уравнений колебаний найдем амплитуду и частоту каждого из них.

$$\text{Имеем: } A_1 = 0,03\text{ м; } \nu_1 = 2\text{ Гц;}$$

$$A_2 = 0,06\text{ м; } \nu_2 = 5\text{ Гц.}$$

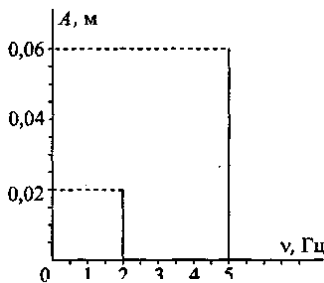


Рис. 3

По этим данным начертим спектр результирующего колебания (рис.3).

**Пример 9.10** Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = 2 \sin \omega t$  м и  $y = 2 \cos \omega t$  м. Найти траекторию результирующего движения точки.

**Решение:**

Из уравнений колебаний

$$x = 2 \sin \omega t \quad (1)$$

и

$$y = 2 \cos \omega t \quad (2)$$

исключим время. Из основного тригонометрического тождества

$$\cos \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} \quad (3).$$

Подставив (3) в (2), получаем  $y = 2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$  или  $y^2 = 4(1 - \frac{x^2}{4}) = 4 - x^2$ .

Отсюда после преобразования получим уравнение окружности радиусом  $R = 2$  м, которое имеет вид

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

**Ответ:**  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

**Пример 9.11** Написать уравнение результирующего колебания, получающегося в результате сложения двух взаимно перпендикулярных колебаний с одинаковой частотой  $\nu_1 = \nu_2 = 5 \text{Гц}$  и одинаковой начальной фазой  $\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ . Амплитуды колебаний равны  $A_1 = 0,10 \text{ м}$  и  $A_2 = 0,05 \text{ м}$ .

**Решение:**

При сложении двух взаимно перпендикулярных колебаний одинакового периода уравнение траектории результирующего колебания имеет вид

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (1).$$

Т. к. у нас  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ , то уравнение (1) примет вид  $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} = 0$ ,

или  $\left(\frac{x}{A_1} - \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0$ ,

откуда  $y = \frac{A_2}{A_1} x$

— уравнение прямой линии. Таким образом, результирующее колебание будет происходить по прямой линии. Угол наклона прямой найдется из уравнения  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{A_2}{A_1} = 0,5$ ,

то есть  $\alpha = 26^\circ 34'$ .

Период результирующего колебания равен периоду слагаемых колебаний, а амплитуда результирующего колебания  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = 11,2 \text{ см}$ . Следовательно, уравнение результирующего колебания имеет вид:  $s = 11,2(10\pi + \frac{\pi}{3}) \text{ см}$ .

**Ответ:**  $s = 11,2(10\pi + \frac{\pi}{3}) \text{ см}$

**Пример 9.12** Логарифмический декремент затухания математического маятника  $N = 0,2$ . Во сколько раз уменьшится амплитуда колебаний за одно полное колебание маятника?

**Решение:**

По формулам для затухающих колебаний имеем

$$A_1 = A_0 \exp\left(-N \frac{t}{T}\right);$$

$$A_2 = A_0 \exp\left(-N \frac{t+T}{T}\right),$$

откуда

$$\frac{A_1}{A_2} = e^N = 1,22$$

**Ответ:**  $\frac{A_1}{A_2} = 1,22$ .

**Пример 9.13** Уравнение затухающих колебаний дано в виде  $x = 5e^{-0.25t} \sin \frac{\pi}{2}t$  м. Найти скорость колеблющейся точки в моменты времени  $t$ , равные:  $0, T, 2T, 3T$  и  $4T$ .

**Решение:**

Скорость точки, совершающей колебания, в том числе затухающие, определяется соотношением

$$V = \frac{dx}{dt}. \quad (1)$$

По условию смещение точки изменяется по закону

$$x = 5e^{-0.25t} \sin \frac{\pi}{2}t \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$V = \frac{d}{dt} \left( 5e^{-0.25t} \sin \frac{\pi}{2}t \right);$$

$$V = 5e^{-0.25t} \left( \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}t - 0.25 \sin \frac{\pi}{2}t \right)$$

Подставляя числовые данные, составим таблицу:

$t, \text{ с}$	$0$	$T$	$2T$	$3T$	$4T$
$V, \text{ м/с}$	7,85	2,89	1,06	0,39	0,15

**Пример 9.14** Точка участвует в двух взаимно перпендикулярных колебаниях  $x = \cos \pi t$  и  $y = \cos \frac{\pi}{2}t$ . Найти уравнение траектории результирующего движения точки.

**Решение:**

Имеем 
$$y = \cos \frac{\pi}{2}t = \sqrt{\frac{1 + \cos \pi t}{2}},$$

откуда 
$$2y^2 - 1 = \cos \pi t.$$

По условию  $x = \cos \pi t$ , отсюда  $\frac{2y^2 - 1}{x} = 1$  или  $2y^2 - x = 1$  - уравнение параболы.

**Ответ:**  $2y^2 - x = 1.$

**Пример 9.15** Найти логарифмический декремент затухания  $N$  математического маятника, если за время  $t = 1$  мин амплитуда колебаний уменьшилась в 2 раза. Длина маятника  $l = 1$  м.

**Решение:**

По формулам для затухающих колебаний имеем

$$A_1 = A_0 \exp\left(-N \frac{t}{T}\right) \quad (1).$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (2).$$

Из уравнения (1) с учетом (2) получаем

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{Nt}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}\right) \quad (3).$$

По условию  $\frac{A_0}{A_1} = 2$ , тогда из уравнения (3) получим

$$\exp\left(\frac{Nt}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}}\right) = 2$$

Прологарифмируем уравнение (4), тогда

$$\frac{Nt}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \ln 2,$$

откуда логарифмический декремент затухания

$$N = \frac{2\pi}{t} \sqrt{\frac{l}{g}} \ln 2 = 0,023$$

**Ответ:**  $N = 0.023$ .

**Пример 9.16** Точка совершает колебания по закону  $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ , где  $A = 2$  см. Определить начальную фазу  $\varphi$ , если  $x(0) = -\sqrt{3}$  см и  $\dot{x}(0) < 0$ . Построить векторную диаграмму для момента  $t = 0$ .

**Решение:**

Воспользуемся уравнением движения и выразим смещение в момент  $t = 0$  через начальную фазу:  $x(0) = A \cos \varphi$ .

Отсюда найдем начальную фазу:  $\varphi = \arccos \frac{x(0)}{A}$ .

Подставим в это выражение заданные значения  $x(0)$  и  $A$ :

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Значению аргумента  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  удовлетворяют два значения угла:  $\varphi_1 = 5\pi/6$  и  $\varphi_2 = 7\pi/6$ .

Для того чтобы решить, какое из этих значений угла  $\varphi$  удовлетворяет еще и условию  $x(0) < 0$ , найдем сначала  $\dot{x}(t)$ :

$$\dot{x}(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi).$$

Подставив в это выражение значение  $t = 0$  и поочередно значения начальных фаз  $\varphi_1 = 5\pi/6$  и  $\varphi_2 = 7\pi/6$ , найдем

$$\dot{x}(0) = -\frac{1}{2} A \omega \quad \text{и} \quad \dot{x}(0) = \frac{1}{2} A \omega.$$

Так как всегда  $A > 0$  и  $\omega > 0$ , то условию  $\dot{x}(0) < 0$  удовлетворяет только первое значение начальной фазы. Таким образом, искомая начальная фаза  $\varphi = 5\pi/6$ .

По найденному значению  $\varphi$  построим векторную диаграмму (рис. 1).

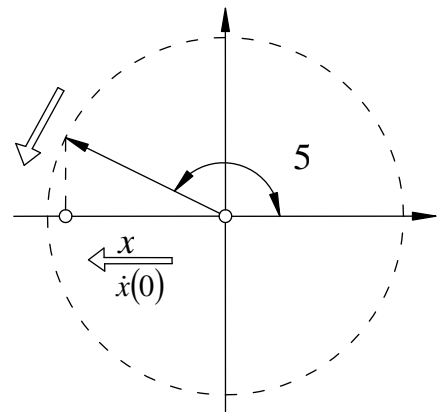


Рис. 1

**Пример 9.17** Математический маятник длиной  $l=24,7$  см совершает затухающие колебания. Через какое время  $t$  энергия колебаний маятника уменьшится в 9,4 раза? Задачу решить при значении логарифмического декремента затухания: а)  $N = 0,01$ ; б)  $N = 1$ .

**Решение:**

Для затухающих колебаний имеем

$$A_1 = A_0 \exp\left(-N \frac{t}{T}\right)$$

или

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{Nt}{T}\right) \quad (1).$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad (2).$$

Подставляя (2) в (1), получаем

$$\frac{A_0}{A_1} = \exp\left(\frac{Nt}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right) \quad (3).$$

Полная энергия колебаний

$$W = \frac{2\pi^2 m}{T^2} A^2,$$

и по условию

$$\frac{W_0}{W_1} = \kappa,$$

где  $\kappa = 9,4$  раза, тогда

$$\kappa = \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^2$$

или, с учетом (3),

$$\kappa = \exp\left(\frac{Nt}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}\right) \quad (4).$$

Прологарифмируем уравнение (4), тогда

$$\ln \kappa = \frac{Nt}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\ell}}.$$

Отсюда время, за которое энергия колебаний уменьшится в  $\kappa$  раз,

$$t = \frac{\pi}{N} \sqrt{\frac{\ell}{g}} \ln \kappa \quad (5).$$

Подставляя в (5) значение логарифмического декремента затухания, находим:

а) для  $N_1 = 0,01$  время  $t_1 = 144$  с;

б) для  $N_2 = 1$  время  $t_2 = 1.14$  с.

**Ответ:** а) для  $N_1 = 0,01$  время  $t_1 = 144$  с;

б) для  $N_2 = 1$  время  $t_2 = 1.14$  с.

**Пример 9.18** Математический маятник совершает затухающие колебания с логарифмическим декрементом затухания  $N = 0,2$ . Во сколько раз уменьшится полное ускорение маятника в его крайнем положении за одно колебание?

**Решение:**

Уравнение затухающего колебательного движения имеет вид

$$x = Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \quad (1).$$

Для нахождения ускорения маятника продифференцируем дважды по времени уравнение (1). Имеем:

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [Ae^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi)]; \\ v &= Ae^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)] \end{aligned} \quad (2)$$

— скорость колебаний маятника. Тогда

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (Ae^{-\delta t} [-\delta \sin(\omega t + \varphi) + \omega \cos(\omega t + \varphi)]) \\ a &= Ae^{-\delta t} ((\delta^2 + \omega^2) \sin(\omega t + \varphi) + \delta \omega \cos(\omega t + \varphi)) \end{aligned} \quad (3)$$

Из уравнения (3) находим

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a} &= \frac{-Ae^0 [(\delta^2 + \omega^2) \sin \varphi + \delta \omega \cos \varphi]}{-Ae^{-\delta T} [(\delta^2 T + \omega^2) \sin(2\pi + \varphi) + \delta \omega \cos(2\pi + \varphi)]}; \\ \frac{a_0}{a} &= \frac{e^0}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T} \end{aligned} \quad (4)$$

По определению логарифмический декремент затухания

$$N = \delta T \quad (5)$$

тогда, подставляя (5) в (4), окончательно получаем  $\frac{a_0}{a} = e^N = 1.22$ .

**Ответ:**  $\frac{a_0}{a} = 1.22$

**Пример 9.19** По грунтовой дороге прошел трактор, оставив следы в виде ряда углублений, находящихся на расстоянии  $l = 30$  см друг от друга. По этой дороге покатали детскую коляску, имеющую две одинаковые рессоры, каждая из которых прогибается на  $x_0 = 2$  см под действием груза массой  $m_0 = 1$  кг. С какой скоростью катили коляску, если от толчков на углублениях она, попав в резонанс, начала сильно раскачиваться? Масса коляски  $M = 10$  кг.

**Решение:**

Коляска начнет сильно раскачиваться, если промежуток между двумя последовательными толчками на углублениях будет равен периоду собственных колебаний коляски, который

можно найти по формуле

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

На каждую рессору приходится масса  $m = \frac{M}{2} = 5 \text{ кг}$

Коэффициент упругости

$$k = \frac{m_0 g}{x_0} = 490 \text{ Н/м}$$

Подставляя числовые данные, получим  $T = 0,63$  с.

Кроме того,  $T = \frac{l}{v}$ , откуда  $v = \frac{l}{T} = 0.48 \text{ м/с}$ .

**Ответ:**  $v = 0.48 \frac{M}{c}$ .



**Пример 9.20** Написать уравнение движения, получающегося в результате сложения двух одинаково направленных гармонических колебательных движений с одинаковым периодом  $T = 8$  с и одинаковой амплитудой  $A = 0,02$  м. Разность фаз между этими колебаниями  $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{4}$ . Начальная фаза одного из этих колебаний равна нулю.

**Решение:**

При сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода получается гармоническое колебание того же периода с амплитудой

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

и с начальной фазой, определяемой уравнением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

где  $A_1$  и  $A_2$  — амплитуды слагаемых колебаний,  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — их начальные фазы. Подставляя числовые данные, получим

$$A = \sqrt{2 \cdot (0,02)^2 + 2 \cdot (0,02)^2 \cos \frac{\pi}{4}} = 0,037 \text{ м}; \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}.$$

Отсюда уравнение результирующего движения

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} \quad \text{и} \quad x = 0,037 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right).$$

**Ответ:**  $x = 0,037 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{8}\right)$

**Пример 9.21** Материальная точка массой 5 г совершает гармонические колебания с частотой 0,5 Гц. Амплитуда колебаний  $A = 3$  см. Определить: 1) скорость  $v$  точки в момент времени, когда смещение  $x = 1,5$  см; 2) максимальную силу  $F_{\max}$ , действующую на точку; 3) полную энергию  $E$  колеблющейся точки.

**Решение:**

1. Уравнение гармонического колебания имеет вид

$$x = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

а формулу скорости получим, взяв первую производную по времени от смещения:

$$v = \dot{x} = dx/dt = -A\omega \sin(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Чтобы выразить скорость через смещение, надо исключить из формул (1) и (2) время. Для этого возведём оба уравнения в квадрат, разделим первое на  $A^2$ , второе на  $A^2\omega^2$  и сложим:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{A^2\omega^2} = 1, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{4\pi^2 v^2 A^2} = 1.$$

Решив последнее уравнение относительно  $v$ , найдём  $v = \pm 2\pi v \sqrt{A^2 - x^2}$ .

Выполнив вычисления по этой формуле, получим  $v = \pm 8,2$  см/с.

Знак плюс соответствует случаю, когда направление скорости совпадает с положительным направлением оси  $x$ , знак минус — когда направление скорости совпадает с отрицательным направлением оси  $x$ .

Смещение при гармоническом колебании кроме уравнения (1) может быть определено также уравнением

$$x = A \sin(\omega t + \varphi).$$

Повторив с этим уравнением такое же решение, получим тот же ответ.

2. Силу действующую на точку, найдём по второму закону Ньютона:

$$F = ma, \quad (3)$$

где  $a$  — ускорение точки, которое получим, взяв производную по времени от скорости:

$$a = \ddot{x} = dv/dt = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad a = -4\pi^2 v^2 A \cos(\omega t + \varphi).$$

Подставив выражение ускорения в формулу (3), получим

$$F = -4\pi^2 v^2 mA \cos(\omega t + \varphi).$$

Отсюда максимальное значение силы

$$F_{\max} = 4\pi^2 v^2 mA.$$

Подставив в это уравнение значения величин  $\pi$ ,  $v$ ,  $m$  и  $A$ , найдем  $F_{\max} = 1,49$  мН.

3. Полная энергия колеблющейся точки есть сумма кинетической и потенциальной энергий, вычисленных для любого момента времени.

Проще всего вычислить полную энергию в момент, когда кинетическая энергия достигает максимального значения. В этот момент потенциальная энергия равна нулю. Поэтому полная энергия  $E$  колеблющейся точки равна максимальной кинетической энергии  $T_{\max}$ :

$$E = T_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2. \quad (4)$$

Максимальную скорость определим из формулы (2), положив  $\cos(\omega t + \varphi) = 1$ :  $v_{\max} = 2\pi v A$ . Подставив выражение скорости в формулу (4), найдем  $E = 2\pi^2 m v^2 A^2$ .

Подставив значения величин в эту формулу и произведя вычисления, получим

$$E = 2 \cdot (3,14)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot (0,5)^2 \cdot (3 \cdot 10^{-2})^2 \text{ Дж} = 22,1 \cdot 10^{-6} \text{ Дж}, \text{ или } E = 22,1 \text{ мкДж}.$$

**Ответ:**  $E = 22,1$  мкДж.

**Пример 9.22** На концах тонкого стержня длиной  $l = 1$  м и массой  $m_3 = 400$  г укреплены шарики малых размеров массами  $m_1 = 200$  г и  $m_2 = 300$  г. Стержень колеблется около горизонтальной оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину. Определить период  $T$  колебаний, совершаемых стержнем.

**Решение:**

Период колебаний физического маятника, каким является стержень с шариками, определяется соотношением

$$T = 2\pi \sqrt{J / (mgl_C)}, \quad (1)$$

где  $J$  — момент инерции маятника относительно оси колебаний;  $m$  — его масса;  $l_C$  — расстояние от центра масс маятника до оси.

Момент инерции данного маятника равен сумме моментов инерции шариков  $J_1$  и  $J_2$  и стержня  $J_3$ :

$$J = J_1 + J_2 + J_3. \quad (2)$$

Принимая шарики за материальные точки, выразим моменты их инерции:  $J_1 = m_1(l/2)^2$ ;  $J_2 = m_2(l/2)^2$ . Так как ось проходит через середину стержня, то его момент инерции относительно этой оси  $J_3 = m_3(l/12)^2$ . Подставив полученные выражения  $J_1$ ,  $J_2$  и  $J_3$  в формулу (2), найдем общий момент инерции физического маятника:

$$J = m_1(l/2)^2 + m_2(l/2)^2 + m_3(l/12)^2 = \frac{1}{12} l^2 (3m_1 + 3m_2 + m_3).$$

Произведя вычисления по этой формуле, найдем  $J = 0,158$  кг·м<sup>2</sup>.

Масса маятника состоит из масс шариков и массы стержня:

$$m = m_1 + m_2 + m_3 = 0,9 \text{ кг}.$$

Расстояние  $l_C$  центра масс маятника от оси колебаний найдем, исходя из следующих соображений. Если ось  $x$  направить вдоль стержня и начало координат совместить с точкой  $O$ , то искомое расстояние  $l$  равно координате центра масс маятника, т. е.

$$l_C = x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1(-l/2) + m_2(l/2) + m_3 \cdot 0}{m_1 + m_2 + m_3}, \text{ или } l_C = \frac{(m_1 - m_2)l}{2(m_1 + m_2 + m_3)} = \frac{(m_1 - m_2)l}{2m}$$

Подставив значения величин  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m$ ,  $l$  и произведя вычисления, найдем

$$l_C = 5,55 \text{ см}.$$

Произведя расчеты по формуле (1), получим период колебаний физического маятника:

$$T = 2 \cdot 3,14 \sqrt{0,158 / (0,9 \cdot 9,81 \cdot 5,55 \cdot 10^{-2})} \text{ с} = 11,2 \text{ с}.$$

Ответ:  $T = 11,2$  с

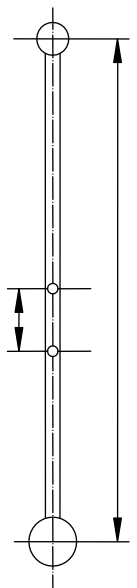


Рис. 1.

**Пример 9.23** Физический маятник представляет собой стержень длиной  $l = 1$  м и массой  $3m_1$  с прикрепленным к одному из его концов обручем диаметром  $d = \frac{1}{2} l$  и массой  $m_1$ . Горизонтальная ось  $OZ$  маятника проходит через середину стержня перпендикулярно ему (см. рис. 1). Определите период  $T$  колебаний такого маятника.

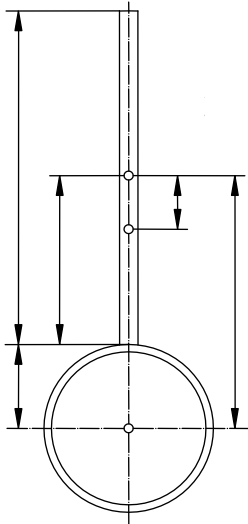


Рис. 3.

**Решение:**

Период колебаний физического маятника определяется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl_c)}, \quad (1)$$

где  $J$  — момент инерции маятника относительно оси колебаний;  $m$  — его масса;  $l_c$  — расстояние от центра масс маятника до оси колебаний.

Момент инерции маятника равен сумме моментов инерции стержня  $J_1$  и обруча  $J_2$ :

$$J = J_1 + J_2. \quad (2)$$

Момент инерции стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его центр масс, определяется по формуле  $J_1 = \frac{1}{12}m_1l^2$ .

В данном случае  $m = 3m_1$  и  $J_1 = \frac{1}{4}m_1l^2$ .

Момент инерции обруча найдем, воспользовавшись теоремой Штейнера

$$J = J_0 + ma^2,$$

где  $J$  — момент инерции относительно произвольной оси;  $J_0$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс параллельно заданной оси;  $a$  — расстояние между указанными осями. Применив эту формулу к обручу, получим

$$J_2 = m_1(l/4)^2 + m_1(3l/4)^2 = \frac{5}{8}m_1l^2.$$

Подставив выражения  $J_1$  и  $J_2$  в формулу (2), найдем момент инерции маятника относительно оси вращения:

$$J = \frac{1}{4}m_1l^2 + \frac{5}{8}m_1l^2 = \frac{7}{8}m_1l^2.$$

Расстояние  $l_c$  от оси маятника до его центра масс равно

$$l_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{3m_1 \cdot 0 + m_1(3l/4)}{3m_1 + m_1} = \frac{3/4 m_1 l}{4m_1} \quad \text{или} \quad l_c = \frac{3}{16}l.$$

Подставив в формулу (1) выражения  $J$ ,  $l_c$  и массы маятника ( $m = 3m_1 + m_1 = 4m_1$ ), найдем период его колебаний:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{7}{8}m_1l^2}{4m_1g \cdot \frac{3}{16}l}} = 2\pi\sqrt{\frac{7l}{7g}}.$$

После вычисления по этой формуле получим  $T = 2,17$  с.

**Ответ:**  $T = 2,17$  с.

## Задачи для самостоятельной работы

**Задача 9.1** Определить период, частоту и начальную фазу колебаний, заданных уравнением  $x = A \sin 2.5\pi(t + 0.4) \text{ м}$ . **Ответ:**  $T = 0.8 \text{ с}$ ,  $\nu = 1.25 \text{ Гц}$ ,  $\varphi_0 = \pi \text{ рад}$ .

**Задача 9.2** Грузик массой 250 г, подвешенный к пружине, колеблется по вертикали с периодом 1 с. Определите жёсткость пружины. **Ответ:**  $\kappa = 9.87 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$ .

**Задача 9.3** Определить максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой  $A = 3 \text{ см}$  и угловой частотой  $\omega = \frac{\pi \text{ рад}}{2 \text{ с}}$ .

**Ответ:**  $v_{\max} = 4.71 \frac{\text{см}}{\text{с}}$ ,  $a_{\max} = 7.40 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ .

**Задача 9.4** Точка совершает гармонические колебания. Наибольшее смещение  $x_{\max}$  точки равно 10 см, наибольшая скорость 20 см/с. Найти угловую частоту  $\omega$  колебаний и максимальное ускорение точки. **Ответ:**  $\omega = 2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ ,  $a_{\max} = 40 \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$ .

**Задача 9.5** Точка совершает колебания по закону  $x = A \sin \omega t$ . В некоторый момент времени смещение  $x_1$  точки оказалось равным 5 см. Когда фаза колебаний увеличилась вдвое, смещение  $x$ , стало равным 8 см. Найти амплитуду  $A$  колебаний. **Ответ:**  $A = 8.33 \text{ см}$

**Задача 9.6** Волна с периодом 1,2с и амплитудой колебаний 2 см распространяется со скоростью 15 м/с. Чему равно смещение  $\xi(x, t)$  точки, находящейся на расстоянии  $x = 45 \text{ м}$  от источника волн, в тот момент, когда от начала колебаний источника прошло время 4 с?

**Ответ:**  $\xi = 10^{-2} \text{ м}$ .

**Задача 9.7** Плоская звуковая волна имеет период 3 мс, амплитуду 0,2 мм и длину волны 1,2 м. Найдите смещение точек волны, удаленных от источника колебаний на расстояние  $x = 2 \text{ м}$  в момент  $t = 7 \text{ мс}$ . Начальную фазу колебаний принять равной нулю.

**Ответ:**  $\xi = -0.1 \text{ мм}$ .

**Задача 9.8** Определить максимальное и минимальное значения длины звуковых волн, воспринимаемых человеческим ухом, соответствующие граничным частотам  $\nu_1 = 16 \text{ Гц}$  и  $\nu_2 = 20 \text{ кГц}$ . Скорость звука принять равной 340 м/с. **Ответ:**  $\lambda_1 = 21 \text{ м}$ ,  $\lambda_2 = 17 \text{ мм}$ .

**Задача 9.9** Две точки находятся на расстоянии 50 см друг от друга на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью 50 м/с. Период  $T$  колебаний равен 0,05 с. Найти разность фаз колебаний в этих точках. **Ответ:**  $\Delta\varphi = 1.26 \text{ рад}$ .

**Задача 9.10** Плоская звуковая волна имеет период 3 мс, амплитуду 0,2 мм и длину волны 1,2 м. Для точек среды, удаленных от источника колебаний на расстояние  $x = 2 \text{ м}$ , найти скорость и ускорение для того же момента времени. Начальную фазу колебаний принять равной нулю. **Ответ:**  $v = 0.363 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ,  $a = 0.439 \frac{\text{км}}{\text{с}^2}$ .