ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 0-1: ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Студент____ группа______________

Допуск ____ Выполнение ________________________Защита ____________

Цель работы: получение и закрепление навыков обработки результатов прямых, косвенных и совместных измерений.
Приборы и материалы: математический маятник, измерительная линейка, секундомер.

Основные теоретические сведения

Одной из важнейших задач физического эксперимента является измерение различных величин. Процесс измерения состоит в том, что измеряемую величину сравнивают с другой величиной, принятой за эталон (например, длину измеряют в метрах, массу в килограммах и т. д.)

Любые измерения никогда не бывают абсолютно точными из–за всевозможных погрешностей, возникающих в процессе измерения. В связи с этим всегда возникает разброс результатов измерений, что требует специальной математической обработки полученных результатов. В процессе этой обработке вычисляется среднее значение результатов измерения, которое является наиболее близким по величине к истинному значению, а также производится оценка погрешности или, как говорят, ошибки окончательного результата.

Определение погрешности измерения является обязательным элементом любого эксперимента.

Среди множества погрешностей измерений основными являются следующие:

Систематические погрешности - это погрешности, возникающие следствие неправильной калибровки или настройки шкалы прибора (например, сбитый ноль прибора, тепловое расширение линейки и т. д.), ошибочности метода измерений и т.п.

Основной особенностью систематических погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения всегда в одну и ту же сторону и на одну и туже величину. Повторными измерениями эти ошибки устранить или уменьшить нельзя, однако их можно оценить, проведя измерения более точными приборами, и в дальнейшем эту ошибку учитывать при вычислениях или изменить методику измерений.

К систематическим погрешностям можно отнести:

приборные погрешности – это погрешности, обусловленные тем, что практически любое измерительное устройство обладает ограниченной степенью точности, например, линейкой с ценой деления 1 см нельзя измерить длину стола с точностью до одного миллиметра и т. п. Практически для большинства измерительных устройств (за исключением электроизмерительных приборов) в ***качестве приборной погрешности*** принимается величина, равная ***половине цены деления шкалы данного прибора***.

погрешности округления - это погрешности, обусловленные тем, что при расчетах приходится различные табличные величины всегда округлять до какого–то определенного разряда. ***В качестве ошибки округления*** принимают величину, равную ***половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины***.

Случайные погрешности – это погрешности, возникающие вследствие изменчивости условий эксперимента, несовершенства органов чувств человека и т. д.

Основной особенностью случайных погрешностей является то, что измеренные значения отклоняются от истинного значения то в одну, то в другую сторону на произвольную величину. Случайные погрешности можно уменьшить, увеличивая число измерений, причём с ростом числа таких измерений ошибка уменьшается пропорционально $\frac{1}{\sqrt{n}}$, (где n - число измерений в одинаковых условиях). Сами случайные погрешности подчиняются законам теории вероятности и математической статистики.

Чаще всего случайные погрешности проявляются в виде разброса показаний прибора. В результате этого разброса измеряемая величина случайным образом отклоняется от истинного значения в разные стороны на произвольную величину.

Промахи – это погрешности, возникающие вследствие невнимательности экспериментатора или недостаточной его квалификации и опыта.

Их можно наблюдать, например, при неправильном отсчете измеряемого значения (неправильное определение цены деления прибора и т. д.). Кроме того, к промахам могут привести внезапные сильные внешние влияния на измерительное устройство, повреждения или помехи, которые нельзя считать субъективными и т. п..

Основной особенностью промахов является то, что их величина резко выделяется из серии однотипных измерений. При обработке результатов эксперимента промахи необходимо исключить и по – возможности провести повторные измерения.

В методах математической статистики для обработки результатов измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, используется понятие ***генеральной совокупности значений измеряемой величины*** и понятие ***выборки.***

Генеральной совокупностью значений данной величины x называется множество всех допустимых значений, которые может принимать эта величина x.

Выборкой объёмом n называется совокупность n значений измерений величины x: $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Очевидно, что выборка переходит в генеральную совокупность, если её объём, то есть число измерений n, стремится к максимально возможному.

Для обработки случайных погрешностей вводят следующие величины:

Средним значением выборки объёмом n для величины x называется величина, равная :

$$< x >= \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \qquad (0.1)$$

Среднее значение, как правило, оказывается наиболее близким по величине к истинному значению, чем отдельные измерения.

Дисперсией выборки (или **дисперсией опыта**) объемом n для величины x называется величина, равная :

$$S_x^2 = \frac{(x_1 - < x >)^2 + (x_2 - < x >)^2 + \ldots + (x_n - < x >)^2}{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2}{n-1}. \qquad (0.2)$$

Дисперсия выборки является мерой отклонения измеренных значений x_i *от их среднего значения* $< x >$.

Дисперсией среднего значения объёмом n для величины x называется величина, равная :

$$S_{<x>}^2 = \frac{(x_1 - < x >)^2 + (x_2 - < x >)^2 + \ldots + (x_n - < x >)^2}{n(n-1)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - < x >)^2}{n(n-1)}. \qquad (0.3)$$

Дисперсия среднего значения является мерой отклонения среднего значения выборки от истинного значения измеряемой величины.

Величина $S_{<x>}$, равная $S_{<x>} = \sqrt{S_{<x>}^2}$ называется ***среднеквадратичным отклонением среднего значения*** от истинного значения x_0.

Очевидно, что среднее значение и дисперсия зависят как от измеренных значений x_i, так и от объёма выборки n. Причем, при увеличении n до бесконечности среднее значение и дисперсия выборки стремятся, соответственно, к среднему значению и дисперсии генеральной совокупности.

Дисперсию генеральной совокупности обычно обозначают σ_x^2.

Результаты измерений величины x являются случайными числами, поскольку при измерениях присутствуют случайные погрешности измерений. Наиболее часто вероятность получения результата измерений, в которых присутствуют только случайные погрешности, описывается ***распределением Гаусса***.

Плотностью распределения величины x называется функция $\varphi(x)$, такая, что вероятность dp получить измеряемую величину в интервале от x до $x + dx$ равна $dp = \varphi(x) \cdot dx$,

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi} \cdot \sigma_x} e^{-\frac{(x - x_{ист})^2}{2 \cdot \sigma_x^2}}$ - называется ***функцией распределения Гаусса*** (0.4)

На рис 0.1 представлен график функции $\varphi(x)$. Важнейшим свойством её является то, что вероятность получения результата однократного измерения $x_1 \le x \le x_2$ равна площади под кривой в пределах x_1 до x_2. Например, вероятность того, что искомая величина окажется в пределах значений от $x_0 - \sigma_x$ до $x_0 + \sigma_x$ равна **0.683**, в пределах от $x_0 - 2 \cdot \sigma_x$ до $x_0 + 2 \cdot \sigma_x$ вероятность равна **0.954,** а в пределах от $x_0 - 3 \cdot \sigma_x$, до $x_0 + 3 \cdot \sigma_x$ она будет равна **0.997**.

Это означает, что из **1000** измерений **683** наиболее вероятно попадут в интервал $x_0 \pm \sigma_x$, **954** - в интервал $x_0 \pm 2 \cdot \sigma_x$, а **997** соответственно в интервал $x_0 \pm 3 \cdot \sigma_x$.

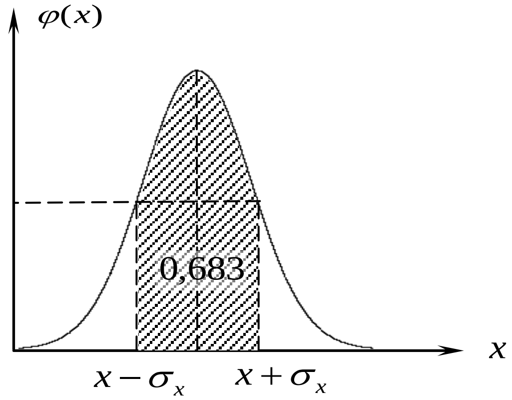


Рис. 0.1. График функции распределения Гаусса.

Прямые измерения

Прямыми *называются измерения, при которых искомая величина определяется с помощью специально предназначенного для этого прибора* (например, температуру определяют с помощью ТЕРМОМЕТРА, длину стола с помощью ЛИНЕЙКИ и т. д.).

Целью физического эксперимента при проведении прямых измерений является определение **среднего значения искомой величины** и, так называемого, **доверительного интервала**, в котором находится истинное значение данной величины.

Окончательный ответ при обработке прямых измерений записывается в виде:

$$x = <x> \pm t_{p,k} \cdot S_{<x>},$$

где $<x>$ - среднее значение искомой величины x,

$S_{<x>}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения величины x,

$t_{p,k}$ - коэффициент Стьюдента, значение которого зависит от числа измерений n и вероятности p доверительного интервала.

Коэффициент Стьюдента находится из таблицы 0.1. Зная количество измерений n, и задавая вероятность p доверительного интервала, находят величину параметра $t_{p,k}$ по таблице, где k - число степеней свободы ($k = n-1$).

Таблица 0.1

Значение параметра Стьюдента в зависимости от вероятности p и числа степеней свободы $k = n-1$

k	**Вероятность p**							
	0,6	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,999**
1	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
2	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,2
3	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
4	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,8
5	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
6	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
7	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
8	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0

При обработке прямых измерений ответ должен записываться так:

$$T = \left(1.78 \pm 2.8 \cdot 4.4 \cdot 10^{-2}\right)c = \left(1.780 \pm 0.012\right)c \text{, при } p = 0.95 \text{ и } n = 5.$$

Данная запись означает следующее: ***было проведено пять измерений (*** n ***=5) и истинное значение величины*** T ***с вероятностью*** p ***= 95% (*** p ***= 0.95) находится в интервале*** $\left(1.780 - 0.012\right)c \le T \le \left(1.780 + 0.012\right)c$ **.**

В том случае, если при проведении прямых измерений присутствуют кроме случайных погрешностей и другие виды погрешностей, необходимо также учитывать их влияние на искажения полученных результатов. В этом случае дисперсию прямых измерений находят по формуле: $S^2 = S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_n^2$,

где S_1^2 *- дисперсия измерений от случайных погрешностей,* S_2^2 *- дисперсия измерений от приборных погрешностей и т.д.*

Рассмотрим пример обработки результатов прямых измерений.

Пусть в результате пяти измерений какой - то величины x получены следующие значения:

6; 7; 6; 5; 6.

Необходимо обработать эти результаты.

При обработке прямых измерений ответ должен быть записан следующим образом:

$$x = <x> \pm t_{p,k} \cdot S_{<x>},$$

где $<x>$ - среднее значение искомой величины, $t_{p,k} \cdot S_{\langle x \rangle}$ - доверительный интервал,

$S_{<x>}$ - среднеквадратичное отклонение среднего значения величины x,

$t_{p,k}$ - коэффициент Стьюдента, который находится по таблице 0.1 в зависимости от вероятности доверительного интервала p (задаётся экспериментатором) и числа степеней свободы $k = n-1$, где n – число измерений.

Итак,

1. Находим среднее значение измерений величины x по формуле (0.1)

$$<x> = \frac{6+7+6+5+6}{5} = 6 .$$

2. Дисперсию среднего значения находим по формуле (0.3.)

$$S^2_{<x>} = \frac{(6-6)^2+(7-6)^2+(6-6)^2+(5-6)^2+(6-6)^2}{5\cdot(5-1)} = 0,1$$

3. Среднеквадратичное отклонение среднего значения равно

$$S_{<x>} = \sqrt{S^2_{<x>}} = \sqrt{0,1} = 0,3\ .$$

4. Для вероятности, например, $p = 0,95$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из табл. 0.1: $t_{p,k} = 2.8$

Получаем $x = 6 \pm 2,8\cdot 0,3 = 6,0 \pm 0,8$.

5 Окончательный результат записываем в виде: $x = 6,0 \pm 0,8$ для $p = 0,95$ и $n = 5$

Косвенные измерения

Часто в процессе проведения физических исследований нет специального прибора для измерения необходимой величины y, поэтому приходится проводить косвенные измерения.

***Косвенными** называются измерения, при которых искомая величина рассчитывается по какой – либо функциональной зависимости с применением результатов прямых измерений.*

Косвенные измерения обычно проводятся в том случае, когда прямые измерения провести не удаётся (в основном из-за того, что нет соответствующего прибора)

Косвенные измерения можно обрабатывать двумя способами:

Первый способ: по методике обработки прямых измерений,
Второй способ: с помощью частных производных.

Первый способ: по методике обработки прямых измерений

Согласно этому методу по результатам прямых измерений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ находят по формуле $y = f(x)$ значения косвенных измерений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, затем по формулам (0.1) и (0.3) вычисляют среднее значение $<y>$ и дисперсию среднего значения косвенных измерений $S^2_{<y>}$. Используя эти величины, находят доверительный интервал и записывают окончательный ответ в виде: $y = <y> \pm t_{p,k}\cdot S_{<y>}$.

Рассмотрим на следующем примере порядок обработки косвенных измерений первым способом.

Пусть для некоторого бегуна на 100-метровке пятью наблюдателями получены следующие значения времени пробега в секундах $t_i \in \{13{,}2c; 13{,}4c; 13{,}5c; 13{,}1c; 13{,}6c\}$. Необходимо найти величину средней скорости бегуна на этой дистанции.

Так как мы обрабатываем результаты эксперимента по методике прямых измерений, то ответ должен быть записан в виде

$$\upsilon = <\upsilon> \pm t_{p,k}\cdot S_{<\upsilon>}\ .$$

1. Среднюю скорость бегуна можно определить по формуле $\upsilon = \dfrac{S}{t}$. Следовательно:

$$\upsilon_1 = \frac{S_1}{t_1} = \frac{100\,м}{13{,}2\,c} = 7{,}58\,\frac{м}{c},\quad \upsilon_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{100\,м}{13{,}4\,c} = 7{,}46\,\frac{м}{c},\quad \upsilon_3 = \frac{100\,м}{13{,}5\,c} = 7{,}41\,\frac{м}{c},\quad \upsilon_4 = \frac{100\,м}{13{,}1\,c} = 7{,}64\,\frac{м}{c},$$

$$\upsilon_5 = \frac{100\,м}{13{,}6\,c} = 7{,}35\,\frac{м}{c}\ .$$

2. Находим среднее значение скорости по результатам всех измерений:

$$<\upsilon> = \frac{(7{,}58+7{,}46+7{,}41+7{,}64+7{,}35)\,\frac{м}{c}}{5} = 7{,}49\,\frac{м}{c}$$

3. Находим дисперсию среднего значения скорости

$$S^2_{<\upsilon>} = \frac{\left(7{,}58\,\frac{м}{c} - 7{,}49\,\frac{м}{c}\right)^2 + \left(7{,}46\,\frac{м}{c} - 7{,}49\,\frac{м}{c}\right)^2 + \ldots + \left(7{,}35\,\frac{м}{c} - 7{,}49\,\frac{м}{c}\right)^2}{5(5-1)} = 2{,}88\cdot 10^{-3}\,\frac{м^2}{c^2}\ .$$

4. Находим среднеквадратичное отклонение: $S^2_{<\upsilon>} = \sqrt{2{,}88\cdot 10^{-3}\,\dfrac{м^2}{c^2}} = 0{,}054\,\dfrac{м}{c}$

5. Для вероятности, например, $p = 0,9$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из табл. 0.1: $t_{p,k} = 2.1$

6. Предварительный результат записываем в виде

$$v=(7.49\pm 2.1\cdot 0.054)\frac{м}{с}=(7.49\pm 0.11)\frac{м}{с}$$

7. Окончательный результат записываем в виде

$$v=(7.49\pm 0.11)\frac{м}{с} \text{ для } p=0,9 \text{ и числа измерений } n=5.$$

Такой ответ означает, что было проведено 5 измерений и доверительный интервал записан с вероятностью 95%, то есть, экспериментатор гарантирует, что истинное значение искомой величины с вероятностью 95% находится в интервале значений $\langle v\rangle - t_{p,k}S_{\langle v\rangle} \le v \le \langle v\rangle + t_{p,k}S_{\langle v\rangle}$, то есть $(7.49-0.11)\frac{м}{с} \le v \le (7.49+0.11)\frac{м}{с}$.

Второй способ обработки: с помощью частных производных

Часто первый способ обработки экспериментальных данных оказывается трудоёмким, либо эксперименты очень дорогими, поэтому много измерений провести не удаётся. В этом случае результаты эксперимента обрабатывают вторым способом - методом частных производных.

В этом случае окончательный ответ должен быть записан в виде: $y=\langle y\rangle \pm S_y$.

Здесь возможны два случая.

Первый случай: искомая величина y является функцией ***одной переменной*** x**,** то есть $y=f(x)$.

Среднее значение косвенного измерения $<y>$ находят путем подстановки соответствующего среднего значения прямых измерений величины x в следующее равенство $<y>=f(<x>)$.

Среднеквадратичное отклонение величины y определяется по формуле: $S_y=\sqrt{S_y^2}$,

Дисперсию опыта S_y^2 определяют по формуле:

$$S_y^2=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 S_x^2, \tag{0.7}$$

где $\frac{dy}{dx}$ - первая производная функции y по переменной x,

$$S_x^2=\frac{(x_1-<x>)^2+(x_2-<x>)^2+\ldots+(x_n-<x>)^2}{n-1}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-<x>)^2}{n-1}$$ - дисперсия опыта величины x.

Окончательный ответ записывается в виде: $y=\langle y\rangle \pm S_y$

Второй случай: искомая величина y является ***функцией нескольких переменных*** $x,z,t,\ldots$, то есть $y=f(x,z,t,\ldots)$.

В этом случае среднее значение косвенного измерения $<y>$ находят путем подстановки соответствующих средних значений прямых измерений величин $\langle x\rangle,\langle z\rangle,\langle t\rangle,\ldots$ в нашу функциональную зависимость, то есть

$$\langle y\rangle = f(\langle x\rangle,\langle z\rangle,\langle t\rangle,\ldots).$$

Среднеквадратичное отклонение величины y рассчитывают по формуле: $S_y=\sqrt{S_y^2}$,

Дисперсию опыта S_y^2 величины y определяют по формуле:

$$S_y^2=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 S_x^2+\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 S_z^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 S_t^2+\ldots \tag{0.9}$$

где $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial y}{\partial t}$ - частные производные функции $y=f(x,z,t,\ldots)$ по переменным $x,z,t,\ldots$.

(частные производные находятся как обычные производные в предположении, что какая-то одна величина из $x,z,t,\ldots$ является переменной, а остальные величины принимаются за константы).

Обращаем внимание на то, что число слагаемых в уравнении (0.9) равно числу переменных $x,z,t,\ldots$ в уравнении функции $y=f(x,z,t,\ldots)$.

Окончательный ответ записывают в виде: $y=\langle y\rangle \pm S_y$.

Рассмотрим на следующем примере порядок обработки косвенных измерений вторым способом.

Пусть для некоторого бегуна на 100-метровке пятью наблюдателями получены следующие значения времени пробега в секундах $t_i \in \{13{,}2c; 13{,}4c; 13{,}5c; 13{,}1c; 13{,}6c\}$. Необходимо найти величину средней скорости бегуна на этой дистанции.

Ответ должен быть записан в виде $\upsilon = <\upsilon> \pm S_{<\upsilon>}$.

1. Среднее значение скорости спортсмена определим по формуле $<\upsilon> = \dfrac{S}{\langle t \rangle}$. Поэтому для начала найдём среднее значение времени пробега по дистанции:

$$<t> = \frac{13{,}2\,c + 13{,}4\,c + 13{,}5\,c + 13{,}1\,c + 13{,}6\,c}{5} = 13{,}36\ c$$

2. Затем определяем среднее значение скорости

$$<\upsilon> = \frac{S}{<t>} = \frac{100\,м}{13{,}36\,c} = 7.49\,\frac{м}{c}$$

3. Находим формулу для определения дисперсии скорости S_υ^2. Так как формула для нахождения средней скорости $<\upsilon> = \dfrac{S}{<t>}$ является функцией двух переменных S и $<t>$, то дисперсии скорости S_υ^2 будет состоять из двух слагаемых:

$$S_\upsilon^2 = \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial S}\right)^2 \cdot S_S^2 + \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}\right)^2 \cdot S_t^2 .$$

4. Определим каждый множитель в формуле для S_υ^2.

Для этого сначала рассчитываем частные производные:

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial S} = \frac{\partial\left(\dfrac{S}{\langle t \rangle}\right)}{\partial S} = \frac{1}{\langle t \rangle}\ ; \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial t} = \frac{\partial\left(\dfrac{S}{\langle t \rangle}\right)}{\partial t} = -\frac{S}{\langle t \rangle^2}$$

Погрешность в определении длины пути S_S находим как приборную погрешность. Напомним, что в ***качестве приборной погрешности*** принимается величина, равная ***половине цены деления шкалы данного прибора***.

Полагая, что дистанция измерялась лентой с ценой деления 1 см, получаем погрешность измерений расстояния

$$S_{<S>} = 0.5\,см = 0{,}005\ м\,.$$

Дисперсию времени S_t^2 определим по формуле

$$S_t^2 = \frac{(t_1 - <t>)^2 + (t_2 - <t>)^2 + \ldots + (t_5 - <t>)^2}{5-1} = \frac{\sum_{i=1}^{5} (t_i - <t>)^2}{5-1}\,.$$

$$S_t^2 = \frac{(13{,}2c - 13{,}4\,c)^2 + (13{,}4c - 13{,}4\,c)^2 + \ldots + (13{,}6\,c - 13{,}4\,c)^2}{5-1} = 0{,}045c^2$$

Получим $S_t^2 = 0.045\ c^2$

5. Таким образом, формула для определения дисперсии скорости S_υ^2 будет иметь вид:

$$S_\upsilon^2 = \left(\frac{1}{<t>}\right)^2 \cdot S_S^2 + \left(-\frac{S}{<t>^2}\right)^2 \cdot S_t^2 = \frac{1}{<t>^2} \cdot S_S^2 + \frac{S^2}{<t>^4} \cdot S_t^2$$

6. Далее вычисляем дисперсию скорости S_υ^2 и среднеквадратичное отклонение скорости $S_{<\upsilon>}$:

$$S_{<\upsilon>}^2 = \left(\frac{1}{13{,}36\,c}\right)^2 \cdot (0{,}005\,м)^2 + \left(-\frac{100\,м}{(13{,}36\,c)^2}\right)^2 \cdot 0{,}045\,c^2 = 0{,}014\ \frac{м^2}{c^2}$$

$$S_{<\upsilon>} = \sqrt{0{,}014\,\frac{м^2}{c^2}} = 0{,}12\,\frac{м}{c}$$

7. Записываем окончательный результат $\upsilon = (7{,}49 \pm 0{,}12)\,\dfrac{м}{c}$.

Следует обратить внимание на то, что при втором способе обработки доверительный интервал записывается без учета параметра Стьюдента, поэтому этот способ обработки косвенных измерений является менее строгим по сравнению с первым.

Рассмотрим ещё один пример: **Определим объём цилиндра**

Объём цилиндра находится по формуле $V = \pi R^2 h$ или $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ (1)

Метод прямых измерений

Сначала произведём несколько замеров радиусов R_i (а лучше диаметров d_i) цилиндра и его высоты h_i.

Для того, чтобы можно было статистически грамотно обработать результаты опыта, необходимо провести минимум по три замера, а лучше по пять, например,

№ замера	d_i, 10^{-3} м	h_i, 10^{-3} м
1	20.0	10.1
2	20.1	10.2
3	19.9	10.1
4	20.1	10.0
5	20.1	10.1

При обработке методом прямых измерений окончательный ответ должен быть записан в виде

$$V = \langle V \rangle \pm t_{p,k} S_{\langle V \rangle}, \text{ для } n = 5 \text{ и } p = 0.95.$$

1. Среднее значение объёма цилиндра находим по формуле: $\langle V \rangle = \frac{\sum V_i}{n} = \frac{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}{n}$,

где $V_i = \frac{1}{4}\pi d_i^2 h_i$ - это результат i-го измерения.

Получим следующие значения: $V_1 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 h_1 = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot \left(20{,}0 \cdot 10^{-3}\, м\right)^2 \cdot 10{,}1 \cdot 10^{-3}\, м = 3{,}17 \cdot 10^{-6}\, м^3 = 3{,}17\, см^3$.

Аналогично, получим

$$V_2 = \frac{1}{4}\pi d_2^2 h_2 = 3{,}23\, см^3,\quad V_3 = \frac{1}{4}\pi d_3^2 h_3 = 3{,}14\, см^3,\quad V_4 = \frac{1}{4}\pi d_4^2 h_4 = 3{,}17\, см^3,\quad V_5 = \frac{1}{4}\pi d_5^2 h_5 = 3{,}20\, см^3.$$

Тогда среднее значение объёма цилиндра равно:

$$\langle V \rangle = \frac{\sum V_i}{n} = \frac{3{,}17\, см^3 + 3{,}23\, см^3 + 3{,}14\, см^3 + 3{,}17\, см^3 + 3{,}20\, см^3}{5} = 3{,}18\, см^3.$$

2. Среднее квадратичное отклонение среднего значения объёма цилиндра находим по формуле: $S_{\langle V \rangle} = \sqrt{\frac{\sum \left(V_i - \langle V \rangle\right)^2}{n(n-1)}}$.

$$S_{\langle V \rangle} = \sqrt{\frac{\left(3{,}17\, см^3{}_i - 3{,}18\, см^3\right)^2 + \left(3{,}23\, см^3{}_i - 3{,}18\, см^3\right)^2 + \ldots + \left(3{,}20\, см^3 - 3{,}18\, см^3\right)^2}{5 \cdot 4}} = 0{,}0153 см^3$$

3. Коэффициент Стьюдента определяем из таблицы 1 в зависимости от числа степеней свободы $k = n - 1$ и вероятности доверительного интервала p, который выбирает сам экспериментатор.

Для вероятности, например, $p = 0{,}9$ и числа измерений $n = 5$, находим значение параметра $t_{p,k}$ из табл. 0.1: $t_{p,k} = 2.1$

4. Предварительный результат записываем в виде

$$V = \left(3{,}18 \pm 2.1 \cdot 0{,}0153\right) см^3 = \left(3{,}18 \pm 0.03\right) см^3$$

5. Окончательный результат записываем в виде

$$V = \left(3{,}18 \pm 0.03\right) см^3 \text{ для } p = 0{,}9 \text{ и числа измерений } n = 5.$$

Методом прямых измерений обычно пользуются, когда измерения заметно различаются друг от друга (например, из-за того, что цилиндр изготовлен не очень качественно).

Метод частных производных

Обработаем теперь результаты наших замеров для цилиндра методом частных производных.

№ замера	d_i, *см*	h_i, *см*
1	2,00	1,01
2	2,01	1,02
3	1,99	1,01
4	2,01	1,00
5	2,01	1,01

В этом случае ответ должен быть записан в виде: $V = \langle V \rangle \pm S_V$.

1. Находим сначала средние значения диаметра $\langle d \rangle$ и высоты $\langle h \rangle$ цилиндра:

$$\langle d \rangle = \frac{d_1 + d_2 + \ldots + d_5}{5} \quad \text{и} \quad \langle h \rangle = \frac{h_1 + h_2 + \ldots + h_5}{5}.$$

$$\langle d \rangle = \frac{(2{,}00 + 2{,}01 + 1{,}99 + 2{,}01 + 2{,}01)\,см}{5} = 2{,}0\ см, \quad \langle h \rangle = \frac{(1{,}01 + 1{,}02 + 1{,}01 + 1{,}00 + 1{,}01)\,см}{5} = 1{,}01 см.$$

2. Находим среднее значение объёма цилиндра по формуле $\langle V \rangle = \frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle$.

$$\langle V \rangle = \frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}0\,см)^2 \cdot 1{,}01\,см = 3{,}17\,см^3$$

3. Так как формула для определения объёма цилиндра $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ является функцией трёх переменных π, d и h, то формула для определения дисперсии опыта S_V^2 будет состоять из трёх слагаемых.

Число π в формуле $V = \frac{1}{4}\pi d^2 h$ необходимо рассматривать как переменную в виду того, что она является числом с большим количеством знаков после запятой. В этом случае степень его округления будет влиять на полученные результаты, что следует учитывать при расчётах величины S_V^2.

Таким образом, формула для определения дисперсии опыта будет иметь следующий вид:

$$S_V^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial d}\right)^2 S_d^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)^2 S_h^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \pi}\right)^2 S_\pi^2.$$

4. Найдём каждую величину в формуле для нахождения S_V^2.

Сначала определим частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \left(\frac{1}{4}\pi d^2 h\right)'_d = 2\frac{1}{4}\pi d\, h = \frac{1}{2}\pi d\, h; \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \left(\frac{1}{4}\pi d^2 h\right)'_h = \frac{1}{4}\pi d^2; \qquad \frac{\partial V}{\partial \pi} = \left(\frac{1}{4}\pi d^2 h\right)'_\pi = \frac{1}{4} d^2 h.$$

В эти формулы вместо d и h необходимо подставить их средние значения $\langle d \rangle$ и $\langle h \rangle$.

Таким образом: $\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi \langle d \rangle \langle h \rangle$; $\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2$ и $\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{4}\langle d \rangle^2 \langle h \rangle$.

Окончательно получаем: $S_V^2 = \left(\frac{1}{2}\pi \langle d \rangle \langle h \rangle\right)^2 S_d^2 + \left(\frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2\right)^2 S_h^2 + \left(\frac{1}{4}\langle d \rangle^2 \langle h \rangle\right)^2 S_\pi^2$ и $S_V = \sqrt{S_V^2}$.

Проведём расчёты.

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi \langle d \rangle \langle h \rangle = \frac{1}{2} \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}0\ см \cdot 1{,}0\,см = 3{,}14\,см^2; \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{1}{4}\pi \langle d \rangle^2 = \frac{1}{4} \cdot 3{,}14 \cdot (2{,}0\ см)^2 = 3{,}14\,см^2,$$

$$\frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{4}\langle d \rangle^2 \langle h \rangle = \frac{1}{4} \cdot (2{,}0\ см)^2 \cdot 1{,}0\,см = 1{,}0\,см^3$$

При этом величины S_d^2 и S_h^2 находим как дисперсии опыта по формулам $S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \langle d \rangle)^2}{n-1}$ и $S_h^2 = \frac{\sum (h_i - \langle h \rangle)^2}{n-1}$.

$$S_d^2 = \frac{\sum (d_i - \langle d \rangle)^2}{n-1} = \frac{(2{,}0\,см - 2{,}0\,см)^2 + (2{,}01\,см - 2{,}0\,см)^2 + \ldots + (2{,}01\,см - 20{,}0\,см)^2}{4} = 0{,}01\,см^2,$$

$$S_h^2 = \frac{\sum (h_i - \langle h \rangle)^2}{n-1} = \frac{(10{,}2\,см - 10{,}1\,см)^2 + (20{,}1\,см - 10{,}1\,см)^2 + \ldots + (10{,}1\,см - 10{,}1\,см)^2}{4} = 0{,}005\,см^2$$

Величину S_π^2 находим как квадрат табличной погрешности. Напомним, что ***в качестве табличной погрешности принимается величина, равная половине единицы последнего разряда округлённой табличной величины.***
(То есть, если величина округлена до сотых, то погрешность равна половине одной сотой (0,01/2=0,005), если величина округлена до тысячных, то погрешность равна половине одной тысячной (0,001/2=0,0005) и т.п.).

Если взять $\pi = 3{,}14$, то $S_\pi = 0{,}005$ и, следовательно, $S_\pi^2 = (0{,}005)^2 = 25\cdot 10^{-6}$.

Тогда: $$S_V^2 = \left(3{,}14\,см^2\right)^2 \cdot 0{,}01 см^2 + \left(3{,}14\,см^2\right)^2 0{,}005\,см^2 + \left(1{,}0\,см^3\right)^2 \cdot 25\cdot 10^{-6} = 0{,}14\,см^6$$

и $$S_V = \sqrt{S_V^2} = \sqrt{0{,}14 см^6} = 0{,}37\,см^3.$$

5. Окончательный ответ записываем в виде: $V = (3{,}17 \pm 0.37)\,см^3$.

Совместные измерения. Метод наименьших квадратов.

Совместными называются измерения, при которых одновременно определяются значения функции y и значения аргументов x.

Совместные измерения проводятся для определения неизвестных коэффициентов А, В и т.д. в какой-либо функциональной зависимости (например, в уравнении $y = A\cdot x$ необходимо найти параметр A, а в уравнении $y = A\cdot x + B$ необходимо определить параметры A и B. После определения неизвестных коэффициентов A и B можно будет проводить косвенные измерения)**.**

Рассмотрим совместные измерения и порядок их обработки на следующем примере. Допустим, величина y и величина x связаны между собой линейной зависимостью

$$y = A\cdot x \tag{0.10}$$

Пусть в этой зависимости неизвестен коэффициент A. Для его определения необходимо провести совместные измерения. Для этого необходимо одновременно осуществить несколько измерений величин x и y, последовательно определяя их в процессе эксперимента. В этом случае, изменяя каждый раз величину аргумента x_i, из опыта определяем соответствующие значения функции y_i. В результате получим n пар значений $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$.

Отметим на графике в координатах XOY наши экспериментальные точки (см. рис. 0.2 а).

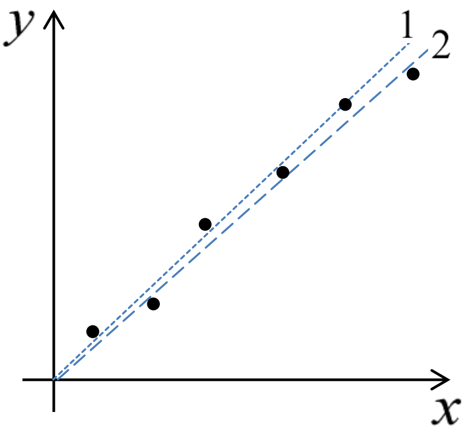


Рис. 0.2 а

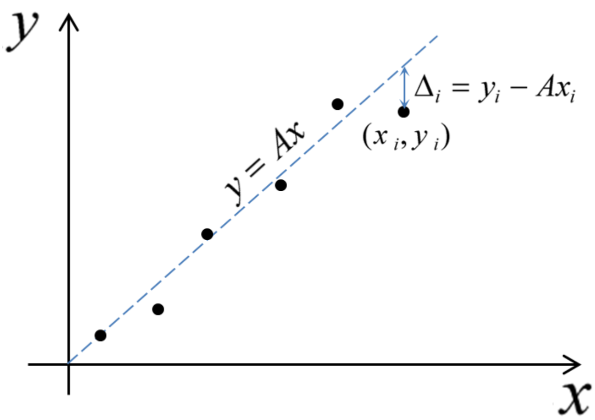


Рис. 0.2 б

Мы увидим, что вследствие случайных погрешностей, полученные нами экспериментальные точки не лежат точно на одной прямой. В результате этого мы можем провести через них много различных прямых (как, например, прямые 1 и 2 на рис.0.2 а). Поэтому необходимо сформулировать критерий для определения неизвестного углового коэффициента A в линейной зависимости $y = A\cdot x$, который бы наилучшим образом соответствовал нашим экспериментальным точкам (см. рис. 0.2 б). Этот критерий в математической статистике получил название **критерия наименьших квадратов**.

Суть этого метода заключается в следующем. Необходимо определить параметр A таким образом, чтобы выполнялись следующие требования:

1. Прямая $y = A\cdot x$ должна проходить так, чтобы экспериментальные точки располагались по обе стороны от этой прямой.
2. Отклонения Δ_i каждого i-го экспериментального значения y_i от нашей прямой $y = A\cdot x$ (то есть $\Delta_i = y_i - A\cdot x_i$) должны удовлетворять следующему критерию:

угловой коэффициент A искомой нами прямой $y = A\cdot x$ должен быть таким, чтобы сумма квадратов отклонений Δ_i^2 от теоретической прямой $y = A\cdot x$ была минимальной.

Это условие метода наименьших квадратов математически записывается так:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} (y_i - A\cdot x_i)^2 \to \min \tag{0.12}$$

В выражении (0.12) остаточная сумма квадратов Q является функцией неизвестного параметра A. Из правил математики известно, что минимальное значение этой функции достигается тогда, когда её производная при некотором неизвестном значении параметра A будет равна нулю, то есть:

$$\frac{dQ}{dA}=0 \tag{0.13}$$

Следовательно, взяв от суммы (0.12) производную по параметру A и приравняв её к нулю, найдём искомую нами величину A.

$$\frac{d\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i-A\cdot x_i)^2\right]}{dA}=2\cdot\sum_{i=1}^{n}(y_i-A\cdot x_i)\cdot(-x_i)=0 \tag{0.14}$$

Это уравнение линейное относительно A , и из него легко можно получить формулу для нахождения неизвестного параметра A:

$$A=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\cdot y_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2} \tag{0.15}$$

Параметр A является случайной величиной. С помощью методов математической статистики можно найти формулу для определения дисперсии этого параметра

$$S_A^2=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-A\cdot x_i)^2}{n-1} \tag{0.16}$$

Таким образом, метод наименьших квадратов позволяет определить по результатам n совместных измерений, как величину неизвестного параметра A, так и его дисперсию S_A^2.

В ряде случаев функциональная зависимость между величинами y и x может отличаться от простейшей линейной зависимости (0.10). Часто приходится использовать несколько более сложную зависимость. Неизвестными уже могут быть не один, а два параметра, которые в результате совместных измерений необходимо определить. Такой зависимостью, например, является линейная функция вида

$$y=A\cdot x+B \tag{0.17}$$

Применяя метод наименьших квадратов, можно аналогичным образом получить расчетные формулы для определения неизвестных коэффициентов A и B в этом случае. Эти формулы будут иметь вид:

$$A=\frac{n\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}y_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}, \qquad B=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{n}x_i\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2} \tag{0.18}$$

Величину дисперсии этих параметров можно определить по формулам:

$$S_A^2=\frac{n}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\frac{Q}{n-2} \qquad S_B^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}\cdot\frac{Q}{n-2},$$

где $Q=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-A\cdot x_i-B\right)^2$

Проверка статистических гипотез. Критерий Фишера

Первый вопрос, который нас интересует после вычисления коэффициента A, это проверка соответствия (0.10) экспериментальным данным x_i, y_i.

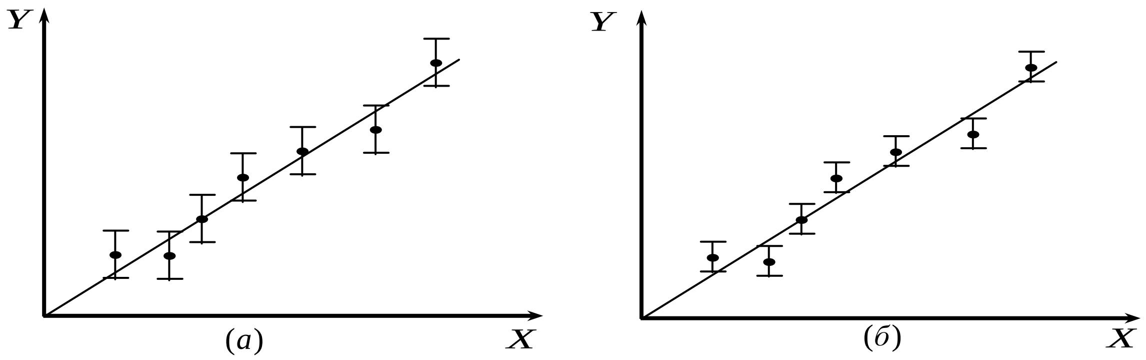


Рис. 0.3.

На рис. 0.3 (а) и рис. 0.3 (б) линией показана зависимость $y = A \cdot x$, полученная по методу наименьших квадратов. Точками показаны экспериментальные данные, которые получены к какими-то погрешностями, а усиками указан интервал значений с разбросом, равным $\pm 2 \cdot S_y$, внутри которого находится истинное значение данной экспериментальной точки.

Очевидно, что зависимость $y = A \cdot x$ соответствует экспериментальным данным только на рис. 0.3 (а).

На рис. 0.3(б) прямая $y = A \cdot x$ не везде проходит через указанный интервал возможных истинных значений экспериментальных точек.

Однако это качественные соображения, а нам нужна количественная оценка. Для характеристики среднего разброса точек относительно прямой $y = A \cdot x$ вполне подходит остаточная сумма квадратов Q. Неудобство состоит в том, что остаточная сумма квадратов Q зависит от числа коэффициентов в уравнении. Кроме того, если ввести столько коэффициентов, сколько имеется независимых измерений, то мы получим остаточную сумму, равную нулю. Поэтому предпочитают делить остаточную сумму Q квадратов на число степеней свободы k.

Числом степеней свободы k в математической статистике называется разность между числом измерений n и числом коэффициентов m, входящих в уравнение $y = f(x, A_1, A_2, \ldots, A_m)$, то есть $k = n - m$.

Дисперсией адекватности $S^2_{ад}$ называется скалярная величина, равная отношению остаточной суммы квадратов Q, к числу степеней свободы $k = n - m$, то есть

$$S^2_{ад} = \frac{Q}{n-m} \tag{0.19}$$

Для зависимости $y = A \cdot x$ дисперсия адекватности равна

$$S^2_{ад} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - A \cdot x_i)^2}{n-1}, \tag{0.20}$$

где $n-$ число совместных измерений величин (x_i, y_i).

Для проверки соответствия зависимости $y = A \cdot x$ экспериментальным данным используют F - критерий (***критерий Фишера***). В этом случае вычисляют следующее соотношение

$$F = \frac{S^2_{ад}}{S^2_{оп}} \tag{0.21}$$

где $S^2_{оп}$ - это дисперсия опыта, то есть:

$$S^2_{оп} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \langle y \rangle)^2}{d-1}, \tag{0.22}$$

где d - число прямых измерений величины y_i.

Из предыдущего равенства видно, что параметр F является величиной случайной и для него существует функция распределения, которая впервые была получена Фишером. Из **табл. 0-2** находят при известном числе степеней свободы дисперсии $(n-m), (d-1)$ и заданной вероятности p, значения $F^{(n-m),(d-1)}_{табл}$

Далее проверяют двухстороннее неравенство

$$\frac{1}{F^{(n-m),(d-1)}_{табл}} \le \frac{S^2_{ад}}{S^2_{оп}} \le F^{(n-m),(d-1)}_{табл} \tag{0.23}$$

В том случае, когда $S^2_{ад} \geq S^2_{оп}$, достаточно производить одностороннюю оценку, т.е.

$$\frac{S^2_{ад}}{S^2_{оп}} \leq F^{(n-m),(d-1)}_{табл} \tag{0.24}$$

Если данные условия выполняются, то с вероятностью, равной p ,можно утверждать, что зависимость $y = A \cdot x$ соответствует полученным экспериментальным данным.

Таблица 0.2:

Значения критерия Фишера $F^{(n-m),(d-1)}_{табл}$ при надежности $p = 0{,}95$ в зависимости от числа степеней свободы сравниваемых величин дисперсий.

d - 1	**n - m**		
	3	4	5
2	**19.00**	**19.16**	**19.25**
3	**9.55**	**9.28**	**9.12**
4	**6.94**	**6.59**	**6.39**
5	**5.79**	**5.41**	**5.19**

Контрольные вопросы

1. Дайте определение основным видам погрешностей и расскажите об их особенностях. Приведите примеры.
2. Как установить наличие «промахов» при проведении измерений? Как отбраковываются промахи?
3. Дайте определение среднего значения выборки, дисперсии опыта, дисперсии среднего значения и среднеквадратичного отклонения.
4. Что такое прямые, косвенные и совместные измерения? Дайте их определения и приведите примеры.
5. Объясните на числовом примере порядок обработки прямых измерений. Для чего используется коэффициент Стьюдента?
6. Объясните на примере два метода обработки косвенных измерений (по методике прямых измерений и через частные производные). Как записывают окончательный результат прямых и косвенных измерений?
7. Для совместных измерений на примере линейной зависимости объясните сущность метода наименьших квадратов.

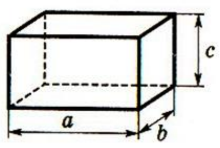
Таблица производных

Функция	Производная	Функция	Производная
x^n	$n\,x^{n-1}$	$\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\cos x$	$-\sin x$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$tg\,x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
e^{nx}	$n\,e^{nx}$	$ctg\,x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{vu' - uv'}{v^2}$	$arctg\,x$	$\frac{1}{1+x^2}$

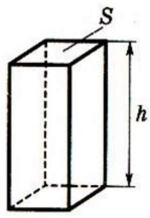
ПРИСТАВКИ И МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ

Приставка	Символ		Множитель
	Международный	Русский	
экса	E	Э	10^{18}
пета	P	П	10^{15}
тера	T	Т	10^{12}
гига	G	Г	10^{9}
мега	M	М	10^{6}
кило	k	к	10^{3}
гекто	h	г	10^{2}
дека	da	да	10

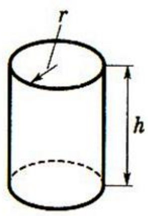
Приставка	Символ		Множитель
	Международный	Русский	
деци	d	д	10^{-1}
санти	c	с	10^{-2}
милли	m	м	10^{-3}
микро	μ	мк	10^{-6}
нано	n	н	10^{-9}
пико	p	п	10^{-12}
фемто	f	ф	10^{-15}
атто	a	а	10^{-18}



$V = abc$



$V = Sh$



$V = \pi r^2 h$

Объём шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Площадь поверхности шара: $S = 4\pi R^2$

Длина окружности: $l = 2\pi R$

Площадь круга: $S = \pi R^2$

Таблица синусов и косинусов

α	0	30	45	60	90
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
sin α	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$